



جمهوری اسلامی ایران  
وزارت آموزش عالی  
تیرم ۱۳۵۵

سال اول

آموزش متوسطه عمومی  
علوم تجربی و ریاضی

# ریاضیات جدید

A

B



C

$A \cup B \cup C$

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

# ریاضیات جدید

سال اول

آموزش متوسطه عمومی

علوم تجربی و ریاضی



مؤلفان:

فرشید مین‌باشیان

میرزا جلیلی

کارشناسان سازمان

کتابهای درسی:

غلامرضا عسجدی

عبدالحسین مصحفی

صفحه پرداز:

پروین صدر

رسام:

خسرو مدیریاد

حقوق مادی این اثر متعلق به وزارت  
آموزش و پرورش است

چاپ از:

۱۳۶۱

به پیشنهاد دفتر تحقیقات این کتاب در سال تحصیلی ۱۳۶۰-۶۱  
در گروه تحقیق دانشگاه اصفهان و دانشگاه صنعتی اصفهان  
(مشکل از گروهی از اساتید و دبیران) مورد بررسی و تصحیح  
قرار گرفته است.

## فهرست

### قسمت اول - جبر گزاره ها

فصل ۱ - گزاره ها ۲

### قسمت دوم - نظریه مجموعه ها

فصل ۱ - مجموعه ها ۲۳

فصل ۲ - اعمال بین مجموعه ها ۵۲

فصل ۳ - مطالبی بیشتر در باره مجموعه ها ۸۲

### توجه :

در این کتاب مجموعه

$$\{1, 2, 3, 4, \dots\}$$

را مجموعه اعداد طبیعی یا مجموعه اعداد صحیح مثبت نامیده  
و آن را با  $N$  نشان می دهیم

$$\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

مجموعه را مجموعه اعداد صحیح نامیده و آن را با  $Z$  و مجموعه

$$\{\dots, -1, \dots, -\frac{1}{2}, \dots, 0, \dots, \frac{1}{2}, \dots, 1, \dots\}$$

$$\left\{\frac{m}{n} \mid m, n \in Z, n \neq 0\right\}$$

را مجموعه اعداد گویا نامیده و آن را با  $Q$  نشان می دهیم.

مجموعه اعداد حقیقی با  $R$  نشان داده می شود. هر عدد

حقیقی که گویا نباشد عدد گنگ نامیده می شود.

## ژرژ بول (۱۸۶۲ - ۱۸۱۵)

ژرژ بول در دوم نوامبر ۱۸۱۵ در شهر کینکلن انگلستان متولد شد. او فرزند دکاندار ساده‌ای بود که از نظر اجتماعی در ردیف طبقه ظرف شویان و پادوهای منزل اشراف بود، و همین ضعف طبقاتی محرومیت‌هایی برای او دربر داشت.

ژرژ بول، تحصیلات ابتدایی خود را در یکی از مدارس که برای فقیران و در محل آنها واقع شده بود تمام کرد. بعد از تحصیلات ابتدایی وارد یک مدرسه بازرگانی شد ولی مطالعات بازرگانی برای او سودمند واقع نگردید و در سن ۱۶ سالگی ناچار شد برای کمک به زندگی پدر و مادرش کار تدریس و معلمی را شروع کند و ۴ سال با مهارت در یک مدرسه ابتدایی درس داد و در سن ۲۰ سالگی خود مدرسه‌ای دایر کرد.

در سال ۱۸۴۸ جزوه کوچکی به نام «آنالیز ریاضی در منطق» منتشر کرد که در آن هوش و نبوغ وی آشکار بود. در سال ۱۸۴۹ به سمت استاد ریاضی کوئینز کالج در ایرلند منصوب شد. در سال ۱۸۵۲ کتاب معروف خود را تحت عنوان:

### «مطالعاتی درباره قوانین فکر»

که منطق ریاضی و حساب احتمالات بر آنها استوار است منتشر ساخت.

ژرژ بول بدقویایی که ریاضی‌دانان نامی چون لایب‌نیتز و دموگاندز مورد «وارد ساختن منطق در حیطه جبر» داشتند، جامعة عمل پوشاند. بول منطق را به نوعی جبر ساده و آسان تبدیل کرد. او استدلال درباره یک موضوع را به وسیله دستورهای ساده جبری بیان کرد.

منطق علامتی بول (جبر گزاره‌ها) سال‌های متشادی بعد از اکتشاف مودد توجه قرار نگرفت ولی امروز منطق ریاضی یکی از شاخه‌های مهم ریاضی است و زبان منطق زبان محاسبه در کامپیوتر است. بول خیلی بعد از انتشار اثر بزرگ خویش زنده نماند و در سال ۱۸۶۴ در سن ۵۰ سالگی در حالی که غرق اختلالات بود و روز به روز بر شهرتش افزوده می‌شد بر اثر ذات‌الریه درگذشت. برتراند راسل فیلسوف و ریاضی‌دان انگلیسی درباره او می‌گوید: ژرژ بول در سال ۱۸۵۴ با انتشار کتاب «قوانین فکر» ریاضیات محض را کشف کرد و این نشان‌دهنده اهمیت است که امروز برای منطق ریاضی و شاخه‌های متعدد آن قائل هستند.

# قسمت اول — جبرگزاره‌ها

## فصل ۱

### گزاره‌ها

#### استدلال و زبان ریاضی

مقدمه — شما مسلماً در زندگی عادی برای آن‌که شنوندهٔ دیر باوری را متقاعد کنید مجبور

به بیان دلیل و برهان شده‌اید. مثلاً، موقعی که بدوستان خود می‌گویند تیم فوتبال A بهتر از B بازی می‌کند، ممکن است بعضی از آنها این حرف را به صادگی بپذیرند و شما مجبور شوید امتیازاتی را که دو تیم اخیراً در بازیهای مختلف کسب کرده‌اند ارائه دهید:

تیم A	۱۵ برد	۲ باخت
تیم B	۶ برد	۳ باخت

یا وقتی به عده‌ای می‌گویید گاز هلیوم سبکتر از هواست شاید باور نکنند و شما به ناچار برای اثبات نظر خود بادکنکی را پر از هلیوم کرده نشان می‌دهید که بادکنک بالا می‌رود.

در ریاضیات نیز وقتی می‌گویید «مجموع دو عدد زوج، عددی است زوج» ممکن است کسی در صحت آن شک کند و شما مجبور شوید به ترتیب زیر توضیح دهید:

الف — فرض کنید دو عدد  $a$  و  $b$  زوج باشند.

ب — طبق این فرض و تعریف عدد زوج داریم:  $a = 2k$  و  $b = 2k'$ .

ج — از جمع  $a$  و  $b$  خواهد داشت:  $a + b = 2k + 2k' = 2(k + k')$  (که  $k$  و  $k'$  اعداد صحیح هستند).

د — با توجه به توزیع پذیری عمل ضرب نسبت به عمل جمع می‌نویسید:

$$a + b = 2(k + k')$$

ه — با توجه به این که مجموع دو عدد صحیح یک عدد صحیح است بنابراین تعریف عدد زوج،

$$a + b \text{ يك عدد زوج است}$$

در بحثهای فوق به طریقی از استدلال استفاده شده است. چون بسیاری از نظریه‌های جدید

در نتیجهٔ استدلال به وجود آمده است و ما در مطالعهٔ رشته‌های مختلف ریاضی به استدلال احتیاج

داریم، لذا لازم است فراگیریم که چگونه استدلال کنیم. روشن است که در ریاضیات برای استدلال

کردن احتیاج به دانستن اصطلاحات، تعاریف و علاماتی داریم که با کمک آنها بتوانیم مطالبی را

که منظور ماست به‌طور دقیق بیان کنیم . به عبارت دیگر ، برای استدلال کردن و استدلال دیگران را فهمیدن قبل از همه چیز باید با زبانی که در این زمینه به کار برده می‌شود آشنا شویم .

در زبان محاوره‌ای ممکن است يك كلمه یا يك جمله در متنه‌ای مختلف یا در شرایط مختلف و حتی در بیانهای مختلف ، معانی متفاوتی داشته باشد . مثلاً جمله « حالا ساعت شش بعد از ظهر است » ، با بیان عادی ، يك جمله ساده است که ساعت ۶ را خبر می‌دهد . ولی فرض کنید که شما صبح به پدرتان قول داده‌اید که ساعت ۶ بعد از ظهر در منزل خواهید بود ، اتفاقاً بعد از ظهر ساعت ۷ به منزل می‌رسید . پدر شما که در منزل منتظر بوده است با دیدن شما با ناراحتی و تندی سؤال می‌کند « حالا ساعت شش بعد از ظهر است ! » معنی این جمله در اینجا مسلماً با معنی قبلی آن فرق دارد . در اینجا گوینده می‌خواهد با تأکید بیان کند که حالا ساعت ۶ نیست .

با وقتی رادبو وضع هوا را که قبلاً اداره هواشناسی پیش‌بینی کرده بخش می‌کند و می‌گوید « هوا رو به گرمی است » از این جمله در زمستان ، بعد از يك برف و سرمای شدید ، استنباط می‌شود که از شدت سرما و برف کاسته خواهد شد و درجه حرارت به‌صورت عادی بر خواهد گشت . در صورتی که مفهوم این جمله در شروع تابستان این است که درجه حرارت هوا کم دارد از  $30^{\circ}$  سانتیگراد تجاوز می‌کند .

با شما در يك زمستان ، ممکن است با مشاهده چند روز جمعه که اتفاقاً هوا بارانی بوده است بگویید « در این زمستان هر جمعه هوا بارانی است » ، در صورتی که در همان زمستان شما جمعه‌هایی که هوا کاملاً آفتابی بوده است نیز داشته‌اید .

با شما در امتحانات پس از گذراندن چند امتحان بگویید « من همیشه در امتحانات بلد شامی می‌آوردم » در صورتی که در همان امتحانات ممکن است نمرات بسیار خوب هم گرفته باشید .

اما ریاضیات يك ابزار اصلی علوم است و از ویژگیهای آن این است که نظریه‌ها را دقیق بیان می‌کند . لذا زبان ریاضی باید دقیق باشد . در ریاضیات ما نمی‌توانیم از آزادی‌هایی که در زبان محاوره‌ای داریم برخوردار باشیم . مثلاً وقتی می‌گوییم « در هر مثلث مساوی الساقین دو ساق با هم برابرند » کلمه هر در اینجا طوری به کار رفته است که مطلب فوق در همه موارد درست است . به عبارت دیگر ، هیچ مثلث مساوی الساقینی وجود ندارد که دو ساق آن مساوی نباشند .

باجمله « يك عدد طبیعی اول است ، هر گاه فقط دارای دو مقسوم علیه متمایز مثبت باشد » . دقیقاً تعریف يك عدد اول را به ما می‌دهد طوری که با این تعریف می‌گوییم « عدد ۷ اول است » و « عدد ۱۲ اول نیست » .

هدف از این بخش ، آشنایی با زبان ریاضی و یادگیری اصطلاحات ، تعاریف و علامات لازم در این زمینه می‌باشد .

## گزاره

بجملات زیر گزاره می گویند :

- عدد ۲۳ اول است
- ۲ کوچکتر از ۳ است
- عدد ۱۲ اول نیست
- نیمساز زاویه ، زاویه را نصف می کند

جمله :

« ۶ عدد اول است »

نیز يك گزاره می باشد .

گزاره جمله ای است خبری که با درست یا نادرست باشد (اگر چه بر ما معلوم نباشد که درست یا نادرست است)  
به عبارت دیگر ،

- ۱- هر گزاره یا درست یا نادرست است .
- ۲- يك گزاره نمی تواند هم درست و هم نادرست باشد .

مثلا :

- $5 < 2$  ، يك گزاره درست است .
  - $3 < 7$  يك گزاره نادرست است .
  - $\{2, 3\}$  يك گزاره درست است .
- اگر گزاره ای درست باشد گوییم ارزش درستی آن یا به طور خلاصه ارزش آن درست است  
اگر گزاره نادرست باشد ، گوییم ارزش آن نادرست است .  
درست یا نادرست بودن ارزش گزاره ها را با حروف اول این کلمات یعنی :

« د » ، « ن »

نمایش می دهیم . جملات :

- نیوتن يك ریاضی دان بزرگ بود
  - زمین به دور خورشید می گردد .
  - افلاطون يك فیلسوف چینی بود .
  - تهران پایتخت ایران است .
- با وجودی که جملات ریاضی نیستند ولی باز گزاره خوانده می شوند . جملات :
- « جمعه پیش ما یاب »
  - « تخته سیاه را پاک کن »
  - « چه برف سنگینی ! »



گزاره نیستند. زیرا، مفهوم درستی یا نادرستی از آنها استنباط نمی‌شود. بعضی اوقات ما فوری نمی‌توانیم بگوییم که يك جمله درست یا نادرست است. مثلا عدد ۱۹۱۷ اول است، در اینجا برای بیان درستی یا نادرستی این جمله احتیاج به اطلاعاتی در مورد تعیین اعداد اول داریم. ولی چون بهر حال از دو صورت خارج نیست و این جمله یا درست یا نادرست می‌باشد، لذا يك گزاره است. جملات:

«دکتره مریم گياه وجود دارد»

«حسین دانشجو است»

نیز از همین قبیل است و گزاره می‌باشند.

### گزاره نما

قبل از بحث راجع به گزاره نما، مطلب زیر را یادآوری می‌کنیم. متغیر علامت یا حرفی است که می‌تواند نمایشگر هر عضو يك مجموعه باشد. متغیر را معمولا با حروف  $x, y, z, \dots$  نمایش می‌دهند. با توجه به تعریف متغیر اکنون به مثالهای زیر توجه کنید:

مثال ۱ - جمله « $x > 0$ » که دارای متغیر  $x$  است به خودی خود يك گزاره نمی‌باشد. زیرا، هیچ نوع اطلاعی از  $x$  داده نشده است. ولی اگر به جای متغیر  $x$ ، يك عدد مثبت مثل ۲ بگذاریم در این صورت خواهیم داشت « $2 > 0$ » که يك گزاره است و درست می‌باشد، و اگر به جای متغیر  $x$  يك عدد منفی مثل ۳ - قرار دهیم، در این صورت جمله « $3 > 0$ » به دست می‌آید که يك گزاره نادرست است.

مثال ۲ - جمله « $x$  يك ریاضی‌دان است» نیز يك گزاره نمی‌باشد ولی اگر به جای متغیر  $x$ ، نبوتن قرار دهیم می‌شود «نبوتن يك ریاضی‌دان است» که يك گزاره درست است و اگر به جای  $x$ ، سعدی قرار دهیم می‌شود «سعدی يك ریاضی‌دان است» که يك گزاره نادرست می‌باشد.

تعریف - جملاتی مانند « $x > 0$ »، « $x$  يك ریاضی‌دان است» یا « $x + y < 2$ »

شامل يك یا چند متغیر هستند گزاره‌نما خوانده می‌شوند.

در مثالهای فوق اگر به جای  $x$ ، «قدر یا درخت فرادهم» جملات « $0 > \text{قدر}$ » یا «درخت يك ریاضی‌دان است» حاصل می‌شود که بی‌معنی است. به عبارت دیگر، در هر گزاره‌نما، عضوهای مجموعه معینی می‌توانند جانشین متغیر شوند تا گزاره‌نما را تبدیل به گزاره نمایند. به چنین مجموعه‌ای



دامنه متغیر گفته می شود .

تعریف - همه اشیا یی که جا نشین متغیر يك گزاره نما می شوند و گزاره نما را به يك گزاره تبدیل می نمایند ، مجموعه ای تشکیل می دهند که به آن دامنه متغیر ( یا حوزه متغیر ) گفته می شود . در گزاره نمای « $x > 0$ » دامنه متغیر مجموعه اعداد حقیقی است و در « $x$  يك ریاضی دان است» دامنه متغیر ، مجموعه انسانهاست .

از طرفی ، در گزاره نمای « $x > 0$ » هر عضو از مجموعه اعداد حقیقی مثبت ، گزاره نمای مزبور را به يك گزاره درست تبدیل می نماید به مجموعه اعداد حقیقی مثبت . مجموعه جواب گزاره نمای « $x > 0$ » می گویند . همچین به مجموعه ریاضی دانها که هر عضو آن گزاره نمای « $x$  ریاضی دان است» را به يك گزاره درست تبدیل می نماید ، مجموعه جواب گفته می شود .

تعریف - همه عضوهای از دامنه متغیر که جا نشین متغیر شده و گزاره نما را به يك گزاره درست تبدیل می نمایند مجموعه ای تشکیل می دهند که بنام مجموعه جواب خوانده می شود .

## سورها

دیدید که جملاتی به صورت :

$$(1) \quad x + 2 > 7$$

که شامل متغیر می باشند گزاره نیستند . اما این گزاره نما یا هر گزاره نمای دیگری<sup>۱</sup> را به طرق زیر می توان به يك گزاره تبدیل نمود .

۱- سور عمومی - به ابتدای گزاره نما ، یکی از عبارات زیر را اضافه می کنیم .

برای تمام مقادیر ؛ برای هر ؛ برای هر کدام (۲)

و بنویسیم :

$$\text{برای هر } x \text{ متعلق به دامنه مفروض ، } x + 2 > 7$$

بدین ترتیب گزاره نمای (۱) ، تبدیل به يك گزاره می شود . زیرا در هر صورت با درست است یا نادرست . هر کدام از عبارات (۲) یا هر عبارت به مفهوم آن را با علامت ،

۷

نمایش داده به آن سور عمومی می گویند . گزاره های زیر با سور عمومی بیان شده اند :

---

۱- منظور گزاره نما با يك متغیر است .

- هر عدد صحیح ، مثبت ، منفی یا صفر است .
  - در هر مثلث ، مجموع زوایای داخلی برابر  $180^\circ$  است .
  - هر مجموعه ، زیر مجموعه خودش است .
  - هر چهار ضلعی که دو قطرش مساوی باشد مستطیل است .
  - هر عدد زوجی بر دو قابل قسمت است .
- گزاره‌هایی که با سور عمومی بیان می‌شوند وقتی درست هستند که همیشه و در مورد همه اعضا درست باشند . به عبارت دیگر :
- گزاره‌ای که با سور عمومی بیان می‌شود ، فقط وقتی درست است که دامنه متغیر آن مساوی مجموعه جوابش باشد .
- از گزاره‌های فوق کدام درست است ؟

مثال ۱ - گزاره « برای تمام مقادیر  $x$  متعلق به مجموعه اعداد طبیعی ،  $x + 2 > 7$  » نادرست می‌باشد . زیرا ، عدد يك متعلق به مجموعه اعداد طبیعی (دامنه متغیر) است در حالی که گزاره  $x + 2 > 7$  ، نادرست می‌باشد . به عبارت دیگر ، دامنه متغیر ، مجموعه اعداد طبیعی است و حال آن که مجموعه جواب :

$$\{6, 7, 8, \dots\}$$

می‌باشد و این دو مجموعه مساوی نیستند .

مثال ۲ - گزاره « برای هر  $x$  متعلق به مجموعه اعداد طبیعی ،  $x + 5 > 2$  » درست می‌باشد . زیرا ، برای هر  $x$  متعلق به مجموعه اعداد طبیعی ، گزاره نمای  $x + 5 > 2$  درست است :

$$(1) \dots \text{و } 2 + 5 > 2 \text{ و } 3 + 5 > 2 \text{ و } 4 + 5 > 2$$

و داریم :

$$\text{دامنه متغیر} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

$$\text{مجموعه جواب} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

و این دو مجموعه مساویند . برای سهولت به جای نوشتن همه گزاره‌های مندرج در قسمت (۱) به طور خلاصه می‌نویسیم :

$$\forall x \in \mathbb{N} : x + 5 > 2$$

و می‌خوانیم « برای هر  $x$  متعلق به مجموعه اعداد طبیعی ،  $x + 5 > 2$  » .

مثال ۳ - گزاره‌های زیر را با استفاده از سور عمومی  $\forall$  بنویسید .

۱- هر عدد زوج بر دو قابل قسمت است .

۲- برای هر عدد طبیعی  $x$  ،  $x^2 \geq x$

۳- برای هر عدد طبیعی  $x$  ،  $x(x+1)$  بر دو قابل قسمت است .

حل :

۱-  $\forall x \in \mathbb{N} \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad x = 2k$  (k عدد صحیح است)

۲-  $\forall x \in \mathbb{N} \quad x^2 \geq x$

۳-  $\forall x \in \mathbb{N} \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad x(x+1) = 2n$  (n عدد طبعی است)

۲- سور وجودی - داه دیگر برای تبدیل گزاره‌های  $x+2 > 7$  یا هر گزاره‌های دیگری

به يك گزاره این است که به ابتدای گزاره‌ها ، یکی از عبارات زیر را اضافه کنیم :

برای بعضی مقادیر ؛ اقلاً برای يك مقدار ؛ مقداری وجود دارد (۱)

و بنویسیم :

برای بعضی مقادیر  $x$  متعلق به مجموعه اعداد طبیعی ،  $x+2 > 7$

هر کدام از عبارات (۱) را با علامت

■

ساخته شده به آن سور وجودی می‌گویند . گزاره‌های زیر با سور وجودی بیان شده‌اند :

- بعضی مثلها متساوی‌الافزین هستند .

- بعضی اعداد زوج بر دو قابل قسمت نیستند .

- بعضی انسانها باهوش هستند .

- برای بعضی مقادیر  $x$  ،  $x \in \mathbb{Q}$  .

گزاره‌هایی که با سور وجودی بیان می‌شوند فقط وقتی درست هستند که اقلاً دارای يك جواب درست باشند .

به عبارت دیگر :

يك گزاره برای همراه با سور وجودی فقط وقتی درست است که مجموعه جواب آن نهی نباشد .

از گزاره‌های فوق کدامها درست هستند ؟

مثال ۱ - گزاره‌های بعضی مقادیر  $x$  متعلق به مجموعه اعداد طبیعی ،  $x+3 < 2$  ، يك

گزاره نادرست می‌باشد . زیرا هر عدد طبیعی که جانشین  $x$  شود يك گزاره نادرست درست می‌آید

به عبارت دیگر:

$$\emptyset = \text{مجموعهٔ جواب}$$

**مثال ۲ - گزارهٔ « برای بعضی مقادیر  $x$  متعلق به مجموعهٔ اعداد طبیعی ،  $x+3 < 6$  » درست می‌باشد .** زیرا ، اگر به‌جای  $x$  اعداد طبعی قرار دهیم گزاره‌های زیر به‌دست می‌آید که افلا یکی از آنها درست است .

$$(۱) \quad ۱+3 < 6 \quad \text{یا} \quad ۲+3 < 6 \quad \text{یا} \quad ۳+3 < 6 \quad \dots$$

به‌عبارت دیگر ، مجموعهٔ جواب مساوی  $\{۱ و ۲\}$  است که غیر تهی می‌باشد .

برای سهولت به‌جای نوشتن همهٔ گزاره‌های قسمت (۱) می‌نویسیم :

$$\exists x \in \mathbb{N} , x+3 < 6$$

و می‌خوانیم « بعضی مقادیر  $x$  متعلق به مجموعهٔ اعداد طبعی وجود دارند بطوریکه ،  $x+3 < 6$  »

**مثال ۳ - گزاره‌های زیر را با استفاده از سور وجودی  $\exists$  بنویسید .**

۱- بعضی از اعداد اول زوجند .

۲- بعضی از دوزن‌ها مساوی‌الساقین هستند .

۳- بعضی دانش‌آموزان با هوش هستند .

**حل :**

۱- مجموعهٔ اعداد اول و  $k$  عدد طبیعی است  $\exists x \in P , x = 2k$

۲- مجموعهٔ دوزن‌ها  $ABCD \in$  ،  $AD = BC$

۳- باهوش است  $\exists x \in$  مجموعهٔ دانش‌آموزان

**۳- سور صفر - يك راه دیگر برای تبدیل گزاره‌نمای «  $x+2 > 7$  » ، با هر گزاره‌نمای**

**مشابه به‌یک گزاره‌آن است که به‌آن گزاره‌ها یکی از عبارتهای زیر (با عبارتهای هم‌معنی آن) را اضافه کنیم :**

برای هیچ مقدار ؛ هیچ ؛ مقداری وجود ندارد

مثلا سربسم . « هیچ عددی متعلق به مجموعهٔ اعداد طبیعی وجود ندارد که ،  $x+2 > 7$  » که

---

۱- گاهی اوقات در بحث از سور وجودی ، حالت خاصی را که مجموعهٔ جواب يك صوری است ، جداگانه در نظر می‌گیرند و آن را سور یگانه نامیده به  $\exists!$  نمایش می‌دهند . مثلا  $\exists! x$  روح و ادل است و  $\exists! x \in \mathbb{N}$  .

در این صورت يك گزاره مادرست داریم

برای سور صفر نماد « $\emptyset$ » به کار می رود .

گزاره های زیر با سور صفر بیان شده اند :

- هیچ مجموعه ای عضو خودش نیست . (به عبارت دیگر : مجموعه ای وجود ندارد که

عضو خودش باشد ) .

- هیچ مرتبی لوزی نیست . (به عبارت دیگر : مرتبی وجود ندارد که لوزی باشد ) .

- هیچ عدد اولی زوج نیست . (به عبارت دیگر : عدد اولی وجود ندارد که زوج باشد) .

$$11 = 2x \text{ و } x \in \mathbb{N} \text{ و } 8x$$

گزاره هایی که با سور صفر بیان می شوند نهایی و نهی درستند که مجموعه حواب آنها نهایی شد

از گزاره های بالا کدامها درست می باشد ؟

مثال ۱ - گزاره «مداری هیچ مقدار  $x$  منطبق به مجموعه اعداد طبیعی ،  $12 < x + 5$  ،

نادرست می باشد . زیرا مثلاً به ازای  $x = 5$  داریم  $12 < 10$  یعنی مجموعه حواب گزاره ها دارای

عضو  $\emptyset$  است و نهی نیست .

مثال ۲ - گزاره های زیر را با استفاده از نماد  $\emptyset$  بنویسید :

۱ - عدد اولی که مضرب  $p$  باشد وجود ندارد .

۲ - مثلث قائم الزاویه ای که متساوی الاضلاع باشد وجود ندارد .

۳ - دانش آموزی که تنبل باشد وجود ندارد .

حل :

۱ -  $x \in P$  و  $x = pk$  مجموعه اعداد اول و  $k$  عدد طبیعی است

۲ -  $AB = BC = CA$  و مجموعه مثلث های قائم الزاویه  $ABC \notin$

۳ -  $x$  تنبل است و مجموعه دانش آموزان  $x \notin$

تعریف - گزاره هایی که با سور عمومی یا سور وجودی یا سور صفر بیان می شوند ، گزاره های

سودی نامیده می شوند.

تمرین

۱ - از جملات زیر کدام يك گزاره است . از گزاره ها کدام يك درست و کدام يك نادرست است .

الف - عدد « $132815$ » اول است .

ب - اولین زن مسابورد روسی بود .

ح - عدد ۲ را روی تخته سیاه بنویس .

د -  $x$  يك عدد صحيح نمی كوچكتر از ۹ است .

ه - دكتر آلبرت شوابنر يك پزشك فداكار بود .

$$x+1=2$$

ز - چه هوای خوبی !

$$2 \in \{1, 3, 5\}$$

$$\{2\} \subset \{1, 3, 5\}$$

ی - ژوزف کانتور مبتکر نظریه مجموعه‌هاست .

۲- هرگاه  $\%$  سمایش مجموعه اعداد صحیح باشد از گزاره‌های زیر کدام درست

است :

$$\sqrt{2} \in \mathbb{Z} ; \sqrt{(-1)^2} \in \mathbb{Z} ; \emptyset \notin \mathbb{Z} ; \{1, 2, 5\} \subset \mathbb{Z}$$

۳- در برشته‌های زیر به‌حای ؟ عدد یا علامت مناسب بگذارید ، طوری که گزاره‌های حاصل

درست باشد .

الف -	$1 \times 7 = 0$	ب -	$-3 \times 7 = -3$
ج -	$(7+2)^2 = 25$	د -	$\frac{10 \times 2}{2} \neq 5 \times 2$
ه -	$5+7 \notin \mathbb{Z}$	و -	$\frac{8 \times 2}{3} \in \{0, 2, \frac{1}{3}\}$
ز -	$5(7-3) = 20$	ح -	$0 \notin \{0\}$

۴- دامنه متغیر گزاره‌های زیر را تعیین کنید .

« $x$  عدد اول است» ؛ « $y$  شاعر است» ؛ « $z$  ایرانی است»

۵- در مجموعه گزاره‌های زیر مجموعه صدایی‌هاست مجموعه جواب هر کدام را بنویسید

« $x$  بین يك و دو است» ؛ « $x$  زوج است» ؛ « $x+1 < 3$ » ؛ « $x > 3$ »

۶- از گزاره‌های سوری زیر کدام درست است :

الف - تمام دختران باهوشتر از پسران هستند .

ب - همه اعداد اول فرد هستند .

ج - هر عدد صبیعی ، زوج یا فرد است .

د - هر زاویه قائمه مساوی  $90^\circ$  است .

۵- برای بعضی از اعداد صحیح  $x$  ،  $x^2 = 1$  .

۶- اقلا برای يك عدد حقیقی  $x$  ،  $x^2 = 1$  .

۷- برای بعضی از مقادیر  $a$  در مجموعه اعداد صحیح نسبی ،  $a^2$  منفی .

۸- برای هیچ مقدار از  $a$  در مجموعه اعداد حقیقی  $0 = 1 + a^2$  نیست .

۹- هیچ نقطه واقعی در داخل دایره بر مماس بر آن دایره واقع نیست .

۱۰- به ازای هیچ مقدار  $x$  متعلق به مجموعه اعداد صحیح ،  $2x < 3x$  .

۱۱- گزاره های نمبرین ۶ را با استفاده از نمادهای  $\exists$  و  $\forall$  بویسد .

۱۲- هرگاه  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  دامنه متغیر باشد ، ارزش گزاره های سوری زیر را

تعیین کنید :

$$\forall x \in A : x + 2 = 10$$

الف -

$$\forall x \in A : x + 2 < 10$$

ب -

$$\exists x \in A : x + 2 < 5$$

ج -

$$\forall x \in A : x + 2 < 7$$

د -

۱۳- هرگاه  $R$  نمایش مجموعه اعداد حقیقی باشد ، ارزش گزاره های سوری زیر را تعیین کنید :

$$\forall x \in R : x^2 > 0$$

الف -

$$\exists x \in R : x^2 = x$$

ب -

$$\exists x \in R : \frac{x-1}{2} = 0$$

ج -

$$\forall x \in R : x^2 = -1$$

د -

نمایش گزاره ها با حروف و جداول درستی آنها

بعضی اوقات در يك درس ممکن است لازم شود که گزاره ای مثل

« عدد ۱۲۱۹۷۵ بر ۵ قابل قسمت است »

را چندین بار تکرار کنیم . در موقع برگشت به این گزاره ، تکرار تمام عبارت قیدی طولانی است .

برای سهولت ، این گزاره را با حرف  $p$  نمایش می دهیم و هر جا لازم باشد می گوییم گزاره  $p$

معادرت و دیگر ، ر حروف الفبای لاتین برای نمایش گزاره ها استفاده می کنیم

$$q : \{2\} \subset \{2, 3\}$$

$$r : 2 < 3$$

مهری هستی دوست دارد .  $s :$



گفتیم هر گزاره مثل  $p$  يا درست يا نادرست است . اين مطلب را به وسيله جدول زير نشان مي دهيم :

$p$
د
ن

جدول ارزشهاي دو گزاره  $p$  و  $q$  در زيرنمايش داده شده است .

$p$	$q$
د	د
د	ن
ن	د
ن	ن

### نقيض يك گزاره

در حساب و حير براي هر عدد  $a$  يك عدد  $a$  — وجود دارد كه خوانده مي شود «مهاي  $a$ » .  
در گزاره ها براي هر گزاره  $p$  ، گزاره  $\sim p$  وجود دارد كه نقيض گزاره  $p$  نام دارد و خوانده مي شود «چنين نيست كه  $p$ » .

مثال ۱ — گزاره  $p : 2 \times 2 = 6$

دروست است . نقيض اين گزاره  $\sim p$  است كه به صورت زير نوشته مي شود :

$$\sim p : \sim (2 \times 2 = 6)$$

$$\sim p : 2 \times 2 \neq 6$$

كه يك گزاره نادرست است .

مثال ۲ — گزاره  $q : 2 \in \{2, 4, 5\}$

نادرست است : نقيض اين گزاره  $\sim q$  است كه به صورت زير نوشته مي شود :

$$\sim q : \sim (2 \in \{2, 4, 5\})$$

یا  $\sim q : ۲۴\{۳, ۴, ۵\}$

که يك گزاره درست است

تعريف - نقيض گزاره  $p$  را  $\sim p$  نمايش داده ارزش آن را طبق جدول زير تعريف مي كنيم .

$p$	$\sim p$
د	ن
ن	د

يعني ، اگر ارزش گزاره  $p$  درست باشد نقيض آن نادرست است و اگر ارزش گزاره  $p$  نادرست باشد نقيض آن درست خواهد بود .

مثال ۳ - ارزش نقيض گزاره زير را تعيين كنيد :

$$F : ۲ \not\leq ۳$$

حل : طبق آنچه در جبر و حساب خوانده ايد ، گزاره  $F$  نادرست است . لذا طبق جدول ، نقيض

آن يعني  $\sim F$  درست خواهد بود :

$$\sim F : \sim (۲ \not\leq ۳)$$

$$\sim F : ۲ \leq ۳$$

با

مثال ۴ - نقيض گزاره « دمرگان رياضي دان است » را بنويسيد :

حل : نقيض گزاره فوق عبارت است از :

چنين نيست كه « دمرگان رياضي دان است »

« دمرگان رياضي دان نيست »

با

### گزاره های مرکب

يك گزاره وقتی معلوم است كه ارزش آن معلوم باشد ، ما در دست داشتن ارزش گزاره های

$p, q, \dots$  و معرفي يك با چند علامت قراردادی موسوم به رابطهای گزاره ها ، مي توان گزاره های

ريكري ، تعريف كرد كه ارزش آنها فقط به ارزش گزاره های  $p, q, \dots$  و علامت قراردادی

بين آنها بستگی داشته باشد . حين گزاره های مرکب نامیده شده آنها را با حروف  $P, Q$

، ... نمايش مي دهند . در اين فصل با چند گزاره مرکب آشنا خواهيد شد .

## ترکیب عطفی

گزارة « عدد ۲ زوج است و عدد ۳ اول است » (۱)

از دو گزاره ساده « عدد ۲ زوج است » و « عدد ۳ اول است » تشکیل شده است . که به وسیله حرف ربط « و » بهم مربوط شده اند . گزاره (۱) يك گزاره مرکب است . هر کدام از گزاره های ساده فوق الذکر ، يك مؤلفه این گزاره مرکب نامیده می شود . آیا گزاره مرکب (۱) درست است ؟ هرگاه بین دو گزاره ساده حرف ربط « و » قرار دهیم ، برای آن که گزاره مرکب حاصل درست باشد ، آیا به نظر نمی رسد که هر دو مؤلفه باید درست باشند ؟ آیا گزاره های مرکب زیر درست هستند ؟

عدد ۲ زوج است و عدد ۳ مضروب ۳ می باشد (۲)

عدد ۲ فرد است و عدد ۳ اول می باشد (۳)

عدد ۲ فرد است و عدد ۳ مضروب ۳ می باشد (۴)

گزاره های مرکب مثل گزاره های فوق را در حالت کلی به صورت :

$$p \wedge q$$

نمایش داده آن را ترکیب عطفی  $p$  و  $q$  می خوانند . ارزش ترکیب عطفی طبق جدول زیر است .

$p$	$q$	$p \wedge q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	ن

بمعبارت دیگر ، ارزش ترکیب عطفی درست است هرگاه هر دو مؤلفه آن درست باشند و در غیر این صورت ، ارزش آن نادرست است .

ارزش چهار گزاره فوق الذکر را با کمک این جدول تعیین کنید .

جدول فوق را جدول درستی یا جدول ارزش گزاره مرکب  $p \wedge q$  می خوانند . رابط گزاره ای «  $\wedge$  » به معنای « و » زبان محاوره ای است .

مثال ۱ - ارزش گزاره زیر را از روی شکل های داده شده تعیین کنید . هر کدام از این شکل ها

تسمی از يك مدار الکتریکی شامل دو کلید (۱) و (۲) است . هر کلید می تواند نمودار بیت گزاره باشد . فرض می کنیم وقتی که کلید بسته باشد ، گزاره درست است (الکتریسیته جریان دارد) و وقتی که کلید باز باشد ، گزاره نادرست است (الکتریسیته جریان ندارد) .



حل ۱- در این شکل هر دو کلید بسته است. لذا

هر دو مؤلفه گزاره مرکب داده شده درست می باشد. در نتیجه، طبق سطر اول جدول ترکیب عطفی، گزاره مرکب درست است. عملاً نیز لامپ روشن خواهد بود.



۲- در این شکل کلید (۱) بسته و کلید (۲) باز

است. لذا یکی از مؤلفه ها درست و دیگری نادرست می باشد. در نتیجه طبق سطر دوم جدول ترکیب عطفی، گزاره مرکب داده شده نادرست می باشد. عملاً نیز لامپ خاموش خواهد بود.



۳- در این شکل، کلید (۱) باز و کلید (۲) بسته

است. لذا یکی از مؤلفه ها نادرست و دیگری درست می باشد. در نتیجه، طبق سطر سوم جدول ترکیب عطفی، گزاره مرکب داده شده نادرست می باشد. عملاً نیز لامپ خاموش خواهد ماند.



۴- در این شکل، کلیدهای (۱) و (۲) هر دو باز

است. لذا هر دو مؤلفه گزاره مرکب داده شده نادرست است. در نتیجه طبق سطر چهارم جدول ترکیب عطفی گزاره مرکب داده شده نادرست می باشد. عملاً نیز لامپ خاموش است.

مثال ۳ - ارزش گزاره های مرکب زیر را تعیین کنید :

الف - زمین به دور خورشید می گردد و پاریس پایتخت فرانسه است.

ب - زمین به دور خورشید می گردد و پاریس پایتخت ایتالیا است.

ج - خورشید به دور زمین می گردد و پاریس پایتخت فرانسه است.

د - خورشید به دور زمین می گردد و پاریس پایتخت ایتالیا است.

حل : طبق معلومات عمومی که دارید، هر دو مؤلفه گزاره اول درست است. لذا گزاره

مرکب حاصل درست می باشد. گزاره های ب و ج، هر کدام يك مؤلفه نادرست دارند، لذا

نادرست می باشند. گزاره آخر نیز که هر دو مؤلفه اش نادرست است نادرست می باشد.

مثال ۴ - ارزش گزاره های مرکب زیر را تعیین کنید :

الف  $(2 < 3) \wedge (2 \times 3 = 12)$

ب  $(5 > 3) \wedge (2 + 3 = 10)$

حل : طبق آنچه در جبر و حساب خوانده اید، هر دو مؤلفه گزاره اول درست است.

لذا گزاره مرکب حاصل درست می باشد. گزاره (ب) يك مؤلفه نادرست دارد،

لذا نادرست می باشد .

## ت ترکیب فصلی

یکی از حرفی که در زبان محاوره ای به عنوان رابط بین جملات ساده استعمال می شود «یا» می باشد که در ریاضیات باید آن را با دقت به کار برد . در زبان محاوره ای از جمله «هوا برفی است یا خورشید در آسمان دیده می شود» بیشتر منظورمان این است که یکی از دو وضع واقع شده و مردود نیست . اما وقتی  $ab = 0$  در این صورت

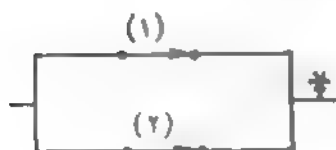
$$a=0 \text{ یا } b=0$$

این «یا» ممکن است هر دو را نیز شامل باشد . اما چون ریاضیات احتیاج به الدقایق دارد که معنی آنها باید روشن باشد ، لذا اگر «یا» را در يك عبارت ریاضی به کار می بریم ، باید مفهوم آن را روشن سازیم . برای دفع هر نوع ابهام ، ریاضی دانها توافق کرده اند که گزاره « $p$  یا  $q$ » را که بصورت « $p \vee q$ » نمایش داده می شود درست بگیرند هرگاه  $p$  یا  $q$  یا هر دو درست باشد . به عبارت دیگر ارزش  $p \vee q$  را از روی ارزشهای  $p$  و  $q$  طبق جدول زیر تعریف کرده اند :

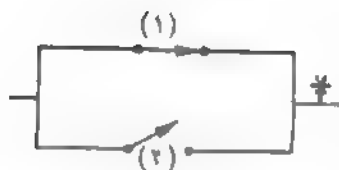
$p$	$q$	$p \vee q$
د	د	د
د	ن	د
ن	د	د
ن	ن	ن

این جدول را جدول ددستی ترکیب فصلی دیای به کار برده شده برای منطقی می خوانند . همچنین  $p$  و  $q$  را مؤلفه های  $p \vee q$  می گویند .

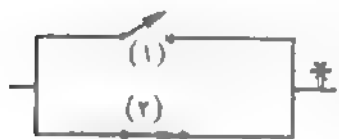
مثال ۱ - ارزش گزاره زیر را از روی شکلهای داده شده تعیین کنید (بشرح مربوط به مثال ۱ از ترکیب عقلی رجوع شود) .



حل : ۱ - در این شکل ، هر دو کلید بسته است . لذا ، هر دو مؤلفه گزاره مرکب داده شده درست می باشد ، در نتیجه طبق سطر اول جدول ترکیب فصلی ، گزاره مرکب داده شده درست است ، ولایت نیز عملاً روشن خواهد بود .



۲- در این شکل، کلید (۱) بسته و کلید (۲) باز است  
لذا، یکی از مؤلفه‌ها درست و دیگری نادرست می‌باشد. در  
نتیجه، طبق سطر دوم جدول ترکیب فعلی، گزاره مرکب  
داده شده درست است و لامپ نیز عملاً روشن خواهد بود.



۳- در این شکل، کلید (۱) باز و کلید (۲) بسته  
است. لذا، یکی از مؤلفه‌ها درست و دیگری نادرست  
می‌باشد. در نتیجه طبق سطر سوم جدول، گزاره داده شده  
درست است و لامپ نیز روشن می‌باشد.



۴- در این شکل، کلیدهای (۱) و (۲) هر دو باز  
است. لذا هر دو مؤلفه گزاره مرکب نادرست می‌باشد. در  
نتیجه طبق سطر چهارم جدول ترکیب فعلی، گزاره مرکب  
داده شده نادرست است و لامپ نیز خاموش می‌باشد.

مثال ۲ - ارزش گزاره‌های زیر را تعیین کنید :

الف - مارکونی مخترع رادیو است یا حکومت انگلستان مشروطه سلطنتی است .

ب - مارکونی مخترع رادیو است یا حکومت انگلستان جمهوری است .

ج - مارکومی مخترع ماشین بخار است یا حکومت انگلستان مشروطه سلطنتی است .

د - مارکونی مخترع ماشین بخار است یا حکومت انگلستان جمهوری است .

حل : طبق معلومات عمومی که دارید، هر دو مؤلفه گزارهٔ اول درست است. لذا، گزارهٔ

مرکب حاصل درست می‌باشد. گزاره‌های ب و ج هر کدام يك مؤلفهٔ درست دارند. در نتیجه طبق

جدول گزارهٔ فعلی درست می‌باشند. بالاخره گزارهٔ آخری که هر دو مؤلفه‌اش نادرست است،

نادرست می‌باشد.

مثال ۳ - ارزش گزاره‌های زیر را تعیین کنید :

الف -  $(2 \times 3 = 6) \vee (2 \in \text{مجموعه اعداد گویا})$

ب -  $2 \in \text{مجموعه اعداد زوج} \vee 2 \in \text{مجموعه اعداد اول}$

ج -  $(\frac{5}{6} = 1) \vee (\frac{5}{6} \neq 0)$

د -  $(2 \in \{2, 2\}) \vee (\frac{1}{2} \neq \frac{2}{2})$

حل : طبق آنچه درجبر و حساب خوانده‌اید و با توجه به جدول ترکیب فعلی، سه گزارهٔ

اول درست و گزارهٔ آخر نادرست است.

## دو گزاره هم ارز

به جدول درسی دو گزاره  $\sim(p \vee q)$  و  $(\sim p) \wedge (\sim q)$  که در زیر نوشته شده است توجه کنید:

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$(\sim p) \wedge (\sim q)$	p	q	$p \vee q$	$\sim(p \vee q)$
د	د	ن	ن	ن	د	د	د	ن
د	ن	ن	د	ن	د	ن	د	ن
ن	د	د	ن	ن	ن	د	د	ن
ن	ن	د	د	د	ن	ن	ن	د

بطوری که می بینید ستون آخر دو جدول فوق یکسان است. دو گزاره را که دارای این خاصیت باشند دو گزاره هم ارز می نامند و می نویسند:

$$\sim(p \vee q) \equiv (\sim p) \wedge (\sim q)$$

دو گزاره که ارزشهای حداول درستی آنها یکسان باشد دو گزاره هم ارز نامیده می شوند. برای بیان هم ارزی دو گزاره از نماد « $\equiv$ » استفاده می شود.

با استفاده از جدول درستی به راحتی می توان خواص زیر را ثابت کرد.

خواص جابجایی، شرکت پذیری و پهنشی  $\wedge$  و  $\vee$

$$p \wedge q \equiv q \wedge p \quad \text{خاصیت جابجایی:}$$

$$p \vee q \equiv q \vee p$$

$$p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r \quad \text{خاصیت شرکت پذیری:}$$

$$p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$$

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r) \quad \text{خاصیت پهنشی:}$$

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

تمرین

۱- نقیض گزاره های زیر را بنویسید:

«عدد ۲۷۱ اول است»: « $۷/۱ \times ۲/۸ = ۱۹/۱۷$ »: « $\frac{۱}{۳} \times \frac{۱}{۲} < \frac{۳}{۵}$ »: «عدد ۱۰۰۱ بر

۱۳ بخش پذیر است». « $۲ \neq ۵$ »: « $۳ < ۵$ »: « $۲ \in \{۲ و ۳ و ۴\}$ »

«کپلر یکی از منجمین معروف است».

۲- مرگه p نمایش گزاره  $\{۵ و ۶\} \in \mathbb{N}$  باشد، گزاره های زیر را با به کار بردن

$\sim$  بنویسید:



الف - چنین نیست که  $p$     ب - چنین نیست که «چنین نیست که  $p$ »

۲- از گزاره‌های زیر کدام درست است:

الف - يك، عدد طبیعی است و دو قطر مستطیل مساوی هستند.

ب - يك، عدد اول است و دو قطر متوازی الاضلاع مساوی هستند.

ج - عدد ۴ روح است یا عدد ۴ متعلق به مجموعه اعداد حقیقی است.

د - عدد ۴ فرد است یا عدد ۴ متعلق به مجموعه اعداد طبیعی است.

ه - عدد ۴ فرد است یا ۴ مربع کامل نیست.

و - عددگویاست و ۴ علامت سود وجودی است.

۲- از گزاره‌های زیر کدام درست است :

الف -  $(7+1=8) \wedge (18>2)$

ب -  $(7+1=80) \wedge (18<2)$

ج -  $(1 \in \mathbb{Z}) \vee (1 \in \mathbb{N})$

۵- در گزاره‌های زیر به‌حای ؟ گزاره‌ای بنویسید که گزاره مرکب حاصل درست باشد.

الف - عدد ۲ زوج است و ؟

ب - ؟ یا  $1 < 2$

ج -  $\{1, 2\} \ni 2$  و ؟

د - عدد ۷ اول است یا ؟

۶- اگر  $a$  برای نمایش گزاره «در دکان‌تور منکر نظریه مجموعه‌هاست» و  $b$  برای نشان دادن «در دکان بول منکر حرکات گزاره‌هاست» به‌کار رفته باشد، عبارات فارسی گزاره‌های زیر را نوشته در صورتی که دو گزاره داده شده درست فرض شود، ارزش آنها را تعیین کنید.

الف -  $a \wedge b$  ، ب -  $a \vee b$  ، ج -  $\sim a$  ، د -  $\sim a \vee b$  ، ه -  $\sim a \wedge b$

۷- جدول درستی گزاره‌های زیر را تشکیل دهید.

$\sim q \vee q$  ،  $\sim p \wedge \sim q$  ،  $\sim p \wedge q$  ،  $\sim q \vee q$  و  $p \wedge \sim q$

$(p \vee q) \wedge \sim p$  و  $(p \wedge q) \vee (\sim p \vee \sim q)$

۸- هرگاه  $p \wedge q$  درست باشد ارزشهای  $p$  و  $q$  را تعیین کنید.

۹- هرگاه  $p \wedge q$  گزاره درستی بوده و  $x$  يك گزاره دعوای باشد ارزش گزاره  $p \vee x$

چيست ؟

۱۰- هرگاه  $p \vee q$  درست و  $q$  نادرست باشد، ارزش  $p$  چيست ؟

۱۱- آیا گزاره مرکب  $p \wedge \sim p$  درست است ؟

۱۲- ارزش گزاره  $p \vee \sim p$  را تعیین کنید.

۱۳- اگر گزاره  $p \wedge q$  درست باشد ارزش گزاره  $r \vee (p \wedge q)$  چیست ؟

۱۴- اگر گزاره  $p \wedge q$  نادرست و  $r$  درست باشد ارزش گزاره  $r \vee (p \wedge q)$  چیست ؟

۱۵- هرگاه  $p$  و  $q$  و  $r$  سه گزاره باشند ما، استفاده از جدول درستی خواص زیر را ثابت کند :

الف -

$$p \wedge q \equiv q \wedge p$$

$$p \vee q \equiv q \vee p$$

خاصیت جابجایی :

$$p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$$

$$p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$$

خاصیت شرکت پذیری :

ح -

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

خاصیت پخشی :

- -

$$\sim(p \wedge q) \equiv (\sim p) \vee (\sim q)$$

$$\sim(p \vee q) \equiv (\sim p) \wedge (\sim q)$$

قوانین دمورگان :

ترکیب شرطی

گزاره‌های شرطی در ریاضیات و در زندگی روزمره به طور فراوان به کار برده می‌شوند

مثال‌گزاره‌های :

- اگر امروز شنبه باشد ، آنگاه فردا یکشنبه است .

- اگر فردا هوا مساعد باشد ، آنگاه فردا بیرون خواهیم رفت .

- اگر  $n-1=0$  ، آنگاه  $n=1$  .

- اگر یک مثلث متساوی‌الاضلاع باشد ، آنگاه مثلث مساوی‌الضلعین است .

همه شرطی هستند .

چیزی که در مثال‌های فوق مشترك می‌باشد این است که همه گزاره‌ها به صورت :

اگر  $p$  ، آنگاه  $q$

بیان شده‌اند . این نوع گزاره‌ها را در حالت کلی به صورت :

$$p \Rightarrow q$$

مدیوش داده آنها را ترکیبهای شرطی می‌خواند. ارزش ترکیب شرطی را، از روی ارزشهای مؤلفه‌ها یعنی  $p$  و  $q$  طبق جدول زیر تعریف کرده‌اند:

$p$	$q$	$p \supset q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	ن	د

$p$  را مقدم و  $q$  را تالی این گزاره می‌نامند. همان‌طور که از روی جدول دیده می‌شود، ترکیب شرطی فقط زمانی نادرست است که مقدم آن درست و قالیبش نادرست باشد و در سایر حالات درست است.

**مثال ۱ -** ارزش گزاره‌های زیر را تعیین کنید:

$$\text{ب - } ۲ < ۳ \Rightarrow -۲ < -۵$$

$$\text{الف - } ۲ < ۳ \Rightarrow ۲ < ۵$$

$$\text{د - } ۵ < ۲ \Rightarrow \{۲\} \subset \{۱, ۲\}$$

$$\text{ج - } ۵ < ۲ \Rightarrow ۱ \in \{۱, ۲, ۳\}$$

**حل:** ملاحظه به آنچه در محرو حساب خوانده ید و طبق جدول ترکیب شرطی، گزاره «ب»، نادرست و بقیه درست می‌باشند.

**مثال ۲ -** ارزش گزاره‌های زیر را تعیین کنید:

الف - اگر ۲ عدد زوج باشد، آن گاه ۴ بر ۲ بخش‌پذیر است.

ب - اگر مثلث سه ضلع دارد، آن گاه مجموع گوشه‌های داخلی مثلث ۲۰۰° است.

ج - اگر ۲ فرد باشد، آن گاه  $\pi$  يك عدد حقیقی است.

د - اگر ۲ فرد باشد، آن گاه مستطیل دو قطر مساوی ندارد.

**حل:** گزاره ب نادرست و بقیه درست می‌باشند. چرا؟

**تذکره -** در زبان محاوره‌ای مقدم و تالی جملات شرطی که به نامهای شرط وجواب شرط

معروف می‌باشند، به طریقی با هم مربوط هستند. مثلاً وقتی می‌گوییم:

اگر رضا ایرانی است، آن گاه رضا حق شرکت در انتخابات را دارد.

در جمله «رضا ایرانی است» و «رضا حق شرکت در انتخابات را دارد» با هم مربوط

می‌باشد. در حقیقت قسمت اول، شرط قسمت دوم است. در صورتی که در گزاره‌های شرطی، در

مؤلفه ممکن است هیچ نوع ارتباطی با هم نداشته باشند. مثلاً:

۱- اگر سعدی اصفهانی است، آن گاه دودخانه پسن در فرانسه است.

۲- اگر ۲ فرد باشد ، آنگاه حافظ شاعر انگلیسی است .

و این اشکالی در بحث گزاره ها ایجاد نمی کند ، چون آنچه در گزاره های شرطی مورد نظر است ارزش مؤلفه ها و در نتیجه ارزش ترکیب شرطی است .

### صورت های دیگر ترکیب شرطی

عبارات زیر برای خواندن گزاره  $p \Rightarrow q$  به کار برده شده است .

- اگر  $p$  ، آنگاه  $q$

-  $p$  نتیجه می دهد  $q$  را

-  $q$  اگر  $p$

-  $q$  شرط لازم برای  $p$  است .

-  $p$  شرط کافی برای  $q$  است

مثال - گزاره های زیر مفروضند :

$p$  : «چهار ضلعی مستطیل است»

$q$  : «دو قطر چهار ضلعی مساوی است»

گزاره شرطی تشکیل شده با مؤلفه های  $p$  و  $q$  فوق به صورت زیر است :

- اگر این چهار ضلعی مستطیل باشد ، آنگاه دو قطرش مساوی است

صورت های دیگر این گزاره را بنویسید .

حل :

- از مستطیل بودن چهار ضلعی نتیجه می شود که دو قطر چهار ضلعی مساوی است .

- دو قطر چهار ضلعی مساوی است ، اگر چهار ضلعی مستطیل باشد .

- تساوی دو قطر چهار ضلعی ، شرط لازم بودن چهار ضلعی است .

- مستطیل بودن چهار ضلعی ، شرط کافی برای تساوی دو قطر چهار ضلعی است .

### عکس ترکیب شرطی

هرگاه در گزاره شرطی ، جای تالی و مقدم را ... در ده دست می آید که

به نام عکس گزاره شرطی خوانده می شود . به عبارت دیگر گزاره  $p \Rightarrow q$  را عکس  $q \Rightarrow p$  می خوانند .

(۱) ترکیب شرطی  $p \Rightarrow q$

(۲) عکس ترکیب شرطی  $q \Rightarrow p$

مابعد توجه داشت که  $p \Rightarrow q$  ، یا گزاره حذید بوده ، ارزش آن مستقیماً از ارزش  $q \Rightarrow p$

می باشد . اگر (۱) درست باشد ممکن است (۲) درست یا نادرست باشد .  
 مثال - گزاره های شرطی زیر درست می باشند، تحقیق کنید عکس کدام يك از آنها درست است .  
 - اگر يك مثلث منفرجه الساقین باشد، آن گاه دوزاویه مجاور به دوساقش با هم برابرند  
 - اگر يك مثلث متساوی الاضلاع است ، آن گاه متساوی الساقین است .  
 - اگر يك چهارضلعی مستطیل باشد ، آن گاه دو قطرش مساوی است  
 حل : عکس این گزاره ها به ترتیب عبارت است از :  
 - اگر دو زاویه مجاور دوساق يك مثلث با هم برابر باشد ، آن گاه آن مثلث متساوی الساقین است .

- اگر يك مثلث متساوی الساقین باشد ، آن گاه متساوی الاضلاع است .  
 - اگر دو قطر يك چهارضلعی مساوی باشد ، آن گاه آن چهارضلعی مستطیل است .  
 گزاره اولی درست است و دومی و سومی نادرست می باشند . چرا ؟

### ترکیب دو شرطی

تركب دو شرطی ، همان طور كه اسم آن نشان می دهد ، از تركيب دو گزاره شرطی عكس يكديگر به وجود آمده است . به مثالهای زیر توجه کنید .

مثال ۱ - گزاره شرطی زیر را در نظر بگیرید .  
 اگر يك چهارضلعی متوازی الاضلاع باشد ، آن گاه اضلاع مقابلش متوازی است . عكس این گزاره شرطی عبارت است از :  
 اگر اضلاع مقابل يك چهارضلعی متوازی باشد ، آن گاه آن چهارضلعی متوازی الاضلاع است .  
 تركيب این دو گزاره شرطی به صورت زیر می باشد :  
 اگر يك چهارضلعی متوازی الاضلاع باشد ، آن گاه اضلاع مقابلش متوازی است و برعكس . (۱)

مثال ۲ - گزاره شرطی زیر را در نظر بگیرید :  
 اگر دو صفحه متمایز  $P$  و  $P'$  متوازی باشند ، آن گاه  $P \cap P' = \emptyset$  .  
 عكس این گزاره شرطی عبارت است از :  
 اگر  $P$  و  $P'$  دو صفحه متمایز و  $P \cap P' = \emptyset$  ، آن گاه دو صفحه  $P$  و  $P'$  متوازی هستند .  
 تركيب این دو گزاره شرطی به صورت زیر می باشد :  
 اگر دو صفحه متمایز  $P$  و  $P'$  متوازی باشند ، آن گاه  $P \cap P' = \emptyset$  و برعكس (۲)

گزاره‌های (۱) و (۲) نمونه‌هایی از ترکیبهای دو شرطی می‌باشند.  
همان‌طور که دیدید، ترکیب دو شرطی عبارت است از ترکیب عطفی گزاره شرطی و عکس آن:

اگر  $p$  آن‌گاه  $q$  و اگر  $q$  آن‌گاه  $p$

یا به‌طور مختصر: اگر  $p$  آن‌گاه  $q$  و برعکس

معبارت دیگر، ترکیب دو شرطی  $p$  و  $q$  عبارت است از ترکیب عطفی  $p \Rightarrow q$  و  $q \Rightarrow p$ :

$$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$$

یا به‌طور مختصر:  $p \Leftrightarrow q$

که خوانده می‌شود «اگر  $q$  و  $q$  اگر  $p$ » یا «اگر  $p$  اگر  $q$  و برعکس»

جدول ارزش ترکیب دو شرطی برحسب ارزشهای  $p$  و  $q$  به‌صورت زیر است.

$p$	$q$	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$
د	د	د	د	د
د	ن	ن	د	ن
ن	د	د	ن	ن
ن	ن	د	د	د

از روی جدول دیده می‌شود که گزاره دوشرطی وقتی درست است که  $p$  و  $q$  هر دو درست یا هر دو نادرست باشند. در زیر جدول فوق را که خلاصه شده است می‌بینید:

$p$	$q$	$p \Leftrightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	د

مثال ۱ - ارزش گزاره‌های دوشرطی زیر را تعیین کنید.

الف -  $2 < 3 \Leftrightarrow 2 + 5 < 3 + 5$

ب -  $2 < 3 \Leftrightarrow -2 < -3$

ج -  $2 > 3 \Leftrightarrow 9 > 8$

د -  $2 > 3 \Leftrightarrow -2 < -3$

حل: با توجه به آنچه در حساب و حر خوانده‌اید و طبق جدول فوق گزاره‌های الف و د که به ترتیب دارای دو مؤلفه درست یا دو مؤلفه نادرست می‌باشند درست هستند و گزاره‌های ب و ج که يك مؤلفه نادرست دارند، نادرست می‌باشند.

مثال ۳ - ارزش گزاره‌های زیر را تعیین کنید:

الف - اگر  $a \in \{b\}$ ، آن‌گاه  $a = b$  و برعکس.

ب - اگر عدد ۳۱ اول باشد، آن‌گاه عدد ۳۱ بر دو قابل قسمت است و برعکس.

ج - اگر ۴ فرد باشد، آن‌گاه ۴ بر دو قابل قسمت است و برعکس.

د - اگر ۴ فرد باشد، آن‌گاه ۴ مضرب ۳ است و برعکس.

حل: طبق آنچه در حر و حساب خوانده‌اید، با توجه به جدول ترکیب دو شرطی گزاره‌های الف و د درست و ب و ج نادرست می‌باشند.

### شرط لازم و کافی

دیدید که ترکیب دو شرطی  $p \iff q$  به معنای:

$$(1) \quad p \Rightarrow q \quad \text{و} \quad (2) \quad q \Rightarrow p$$

می‌باشد. در ترکیب (۱)،  $p$  شرط کافی برای  $q$  و در ترکیب (۲)،  $p$  شرط لازم برای  $q$  است. لذا در مورد ترکیب دو شرطی می‌توان گفت:

$p$  شرط کافی برای  $q$  و همچنین  $p$  شرط لازم برای  $q$  است.

یا به‌طور مختصر:  $p$  شرط لازم و کافی برای  $q$  است.

یا شرط لازم و کافی برای  $q$  آن است که  $p$

لذا، گزاره‌های دو شرطی را می‌توان به‌صورت شرط لازم و کافی بیان کرد

مثال ۱ - گزاره‌ی زیر را به‌صورت‌های شرط لازم و کافی بیان کنید:

الف - اگر نقطه‌ای مانند  $M$  روی بیضایك زاویه باشد، آن‌گاه  $M$  از دو ضلع آن زاویه به يك فاصله است و برعکس.

ب - اگر نقطه‌ای مانند  $M$  روی عمود منصف يك پاره خط باشد، آن‌گاه  $M$  از دو سر آن پاره خط به يك فاصله است و برعکس.

ج - اگر يك مثلث متساوی الساقین باشد، آن‌گاه دو زاویه مقابل به دو ساق آن مساوی است و برعکس.

حل:

الف - شرط لازم و کافی برای آن که نقطه  $M$  از دو ضلع يك زاویه به يك فاصله باشد، آن



است که  $M$  دوی نیمساز آن زاویه باشد.

ب - شرط لازم و کافی برای آن که نقطه  $M$  از دو سر يك پاره خط به يك فاصله باشد، آن است که  $M$  دوی عمود منصف آن پاره خط باشد.

ج - شرط لازم و کافی برای آن که دو زاویه مقابل به دوساق يك مثلث مساوی باشد آن است که آن مثلث مساوی الساقین باشد.

مثال ۲ - شرط لازم و کافی برای آن که مجموع دو عدد فرد باشد، آن است که یکی از آنها فرد و دیگری زوج باشد. این ترکیب دو شرطی را به صورت دو گزاره بیان کنید.

حل - الف - اگر یکی از دو عدد معروض فرد و دیگری زوج باشد، آنگاه مجموع این دو عدد فرد است.

ب - اگر مجموع دو عدد فرد باشد، آنگاه یکی از این دو عدد فرد و دیگری زوج است.

### اگر و تنها اگر

گزاره های دو شرطی که در بالا به صورت شرط لازم و کافی بیان شده اند با

اگر و تنها اگر

نیز قابل بیان می باشند.

نقطه  $M$  دوی نیمساز زاویه است اگر و تنها اگر  $M$  از دو ضلع این زاویه به يك فاصله باشد.  
نقطه  $M$  دوی عمود منصف پاره خط است اگر و تنها اگر  $M$  از دو سر این پاره خط به يك فاصله باشد.

يك مثلث مساوی الساقین است اگر و تنها اگر دو زاویه مقابل به دوساق مساوی داشته باشد.

تذکره - در تعریف ریاضی اغلب از گزاره های دو شرطی استفاده می شود. در زیر چند تعریف آمده است:

- دو خط منقطعند، اگر و تنها اگر يك نقطه ثلاثی داشته باشند.

- مثلث مساوی الساقین است اگر و تنها اگر دوساق مساوی داشته باشد.

### صورتهای مختلف ترکیب دو شرطی

همان طور که دیدید، ترکیب دو شرطی  $p \leftrightarrow q$  به صورتهای زیر خوانده می شود:

- اگر  $p$ ، آنگاه  $q$  و برعکس

-  $p$  شرط لازم و کافی برای  $q$  است.

-  $q$  شرط لازم و کافی برای  $p$  است.

$p$  - اگر و تنها اگر  $q$

### عکس نقیض ترکیب شرطی

با بر تعریف، عکس نقض ترکیب شرطی  $p \Rightarrow q$ ، عبارت است از:

$$\sim q \Rightarrow \sim p$$

ارزش جدول این ترکیب شرطی جدید که خوانده می شود «اگر  $q$  نیست،  $p$  نیست» با ارزش جدول شرطی  $p \Rightarrow q$  یکی می باشد.

$p$	$q$	$p \Rightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	ن	د

$p$	$q$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim q \Rightarrow \sim p$
د	د	ن	ن	د
د	ن	ن	د	ن
ن	د	د	ن	د
ن	ن	د	د	د

بدین ترتیب:

$$(p \Rightarrow q) \equiv (\sim q \Rightarrow \sim p)$$

یعنی دو گزاره شرطی و عکس نقض آن هم ارز بوده و می توان از یکی به جای دیگری استفاده کرد.

تذکره - قواعد و قوانین جبر گزاره ها مبانی اولیه استدلال است. این قواعد و قوانین برای استدلال در کلیه شاخه های ریاضیات مورد استفاده قرار می گیرند. به چند مثال ساده زیر توجه کنید:

مثال ۱- اگر  $a$ ،  $b$  و  $c$  سه عدد حقیقی باشند،

$$(a < b \text{ و } b < c) \Rightarrow a < c$$

در اینجا اگر گزاره های  $P$  و  $Q$  به ترتیب بصورت زیر در نظر گرفته شوند:

$$P: a < b \quad (۱) \quad \text{و} \quad b < c \quad (۲)$$

$$Q: a < c$$

اکنون بایستی درستی گزاره شرطی بصورت « $P \Rightarrow Q$ » را نشان دهیم.

چون  $P$  مفروض است، لذا بنابر (۱)  $a$  کوچکتر است از  $b$ ، پس در (۲) می توان

بجای  $b$  مقدار کوچکتر آن یعنی مقدار  $a$  را قرار داد نتیجه می شود  $a < c$ .

این مثال نمونه ایست از قضایای ریاضی، که یک گزاره شرطی درست می باشند.

**مثال ۲-** اگر مربع عددی زوج باشد، آنگاه آن عدد زوج است.  
فرض کنید  $a$  آن عدد بوده و  $P$  و  $Q$  به ترتیب گزاره‌های زیر باشند:

$$P: a' = 2k \quad \text{و} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$Q: a = 2k' \quad \text{و} \quad k' \in \mathbb{Z}$$

اکنون می‌خواهیم درستی گزاره:  $P \Rightarrow Q$  را نشان دهیم. ولی چون عکس نقیض يك گزاره شرطی با آن گزاره شرطی هم‌ارز است پس کافیت درستی  $P \Rightarrow Q$  را نشان دهیم.

$$\sim Q: a = 2m' + 1 \quad \text{و} \quad m' \in \mathbb{Z}$$

$$\sim P: a' = 2m + 1 \quad \text{و} \quad m \in \mathbb{Z}$$

بدین ترتیب:

$$\sim Q: a = 2m' + 1 \Rightarrow a' = 2m'' + 2m' + 1 = 2(2m'' + 2m') + 1$$

با فرض  $m = 2m'' + 2m'$  داریم  $a' = 2m + 1$  که در نتیجه درستی گزاره  $\sim Q \Rightarrow \sim P$  بدست آمده است.

استفاده از عکس نقیض يك گزاره شرطی برای اثبات آن گزاره شرطی در ریاضیات معمول است.

**مثال ۳-** گزاره زیر درست است یا نادرست؟

« هیچ عدد زوجی اول نیست »

چون عدد ۲ هم زوج است و هم اول لذا گزاره فوق نادرست است.

در اینجا برای اثبات نادرستی يك گزاره فقط از نادرستی این گزاره در يك حالت خاص استفاده کردیم، چون اگر مطلبی در يك حالت خاص نادرست باشد آنگاه کلی بودن این مطلب نادرست خواهد بود. این روش به اثبات توسط مثال نقض موسوم است.

**تمرین**

۱ - ارزش گزاره‌های زیر را تعیین کنید.

$$(2^2 = 126) \Rightarrow (2^8 = 252)$$

الف -

$$2 < 5 \Rightarrow 5 > 2$$

ب -

$$\forall x \in \mathbb{Z}, 2x = 6 \Rightarrow x = 3$$

ج - اگر  $\mathbb{Z}$  مجموعه اعداد صحیح باشد

$$5 \in \{2, 3\} \Rightarrow \{5\} \subset \{2, 3\}$$

د -

۲ - ارزش گزاره‌های زیر را تعیین کنید.

- الف - اگر ۱۲ منسوم علیه ۶۲ نباشد، آنگاه ۲ منسوم علیه ۶۲ نیست.
- ب - اگر  $\pi$  مثلث چهارضلع داشته باشد، آنگاه متوازی الاضلاع سه ضلع دارد.
- ج - اگر ۱۲ زوج باشد، آنگاه  $\{3, 5\}$  ۲۴
- د - اگر ۳۱ عدد اول باشد، آنگاه ۱۱ منسوم علیه ۴۰ است.
- ه - اگر تهران پایتخت ژاپن باشد، آنگاه سعدی ریاضی دان است.
- ۳ - گزاره‌ی زیر را - استفاده از حروف و رابطهای گزاره‌ای نشان دهید.
- الف - اگر من دانشجو شوم و در کوی دانشگاه زندگی کنم، آنگاه حق استفاده از وسنوران کوی دانشگاه را دارم.

ب - اگر دو خط موازی باشند و خطی یکی از آنها را قطع کند، آنگاه دیگری را نیز قطع خواهد کرد.

- ج - اگر  $a < b$  و  $c > c$  آنگاه  $ac < bc$ ،  $a$  و  $b$  و  $c$  اعداد حقیقی هستند).
- د - اگر عدد  $a$  اول و بزرگتر از ۳ باشد، آنگاه  $a$  زوج نیست.
- ۲ - صورتهای دیگر گزاره‌های شرطی زیر را بنویسید:
- الف - اگر یک چهارضلعی لوزی باشد، آنگاه افشارش برهم عمود هستند.
- ب - اگر دو مثلث مشابه باشد، آنگاه زاویه‌های متناظر آنها مساوی است.
- ۵ - اگر گزاره « $a$  عدد زوج است» را  $p$  و گزاره « $a$  بر دو بخش پذیر است» را به  $q$  نمایش دهیم، عبارات فارسی گزاره‌های زیر را بنویسید.

$$p \vee q \Rightarrow q ; q \Rightarrow p ; \sim p \Rightarrow \sim q ; \sim q \Rightarrow \sim p ; \sim q \Rightarrow p$$

۶- جداول ارزش گزاره‌های زیر را تشکیل دهید:

$$\sim p \Rightarrow q ; p \Rightarrow \sim q ; \sim p \Rightarrow \sim q ; (p \wedge q) \Rightarrow p ; (p \vee q) \Rightarrow q$$

$$(p \vee q) \Rightarrow p ; \sim p \Rightarrow (p \vee q) ; (p \vee q) \Rightarrow \sim (p \wedge q)$$

۷- اگر  $p \Rightarrow q$  درست باشد، ارزش  $q$  چیست؟

۸- اگر  $p \Rightarrow q$  و  $\sim q$  درست باشد، ارزش  $\sim p$  چیست؟

۹- ارزش گزاره‌های زیر را تعیین کنید:

$$5 < 2 \Leftrightarrow 3 + 5 < 2 + 5 \quad \text{الف -}$$

$$\angle \alpha = 90^\circ \Leftrightarrow \alpha \text{ قائمه است} \quad \text{ب -}$$

$$a < b \Leftrightarrow a + c < b + c \quad \text{ج - } (a, b, c \text{ اعداد حقیقی هستند}).$$

۱۰- ارزش گزاره‌های زیر را تعیین کنید.

$$\text{الف - اگر } \frac{5}{6} \text{ يك عدد حقیقی باشد، آنگاه } 5 \times 0 = 0 \text{ است و برعکس.}$$

ب - شرط لازم و کافی برای آن که يك خط در صفحه باشد ، آن است كه دو نقطه آن در صفحه باشد .

ج - اگر دو خط موازی به متقاطع باشد ، آنگاه براین دو خط يك صفحه می گذرد و برعکس

د - يك مثلث مادی السابق است اگر و فقط اگر بمسازد و به رأس و از باع نظر آید. رأس بر هم منطبق باشند .

۱۱ - جداول ادزنی گزاره های زیر را تشکیل دهید :

$$\sim p \leftrightarrow q : \sim p \leftrightarrow \sim q \cdot (p \wedge q) \leftrightarrow p : (p \vee q) \leftrightarrow q$$



ژرژ کانتور

ژرژ کانتور<sup>۱</sup> (۱۸۲۵ - ۱۹۱۸)

ژرژ ، لوتی فلیپ کانتور فرزند ژرژ ولادیمیر و ماری بوم بوده است . پدرش در کپنهاگ ( پایتخت دانمارک ) متولد شد و در جوانی به شهر پترزبورگ در روسیه رفت و در آنجا اقامت گزید . ریاضی دان نامی در همین شهر در سوم مارس ۱۸۴۵ متولد گردید . علنی ریوی باعث گردید که پدرش روسیه را ترک کند و در سال ۱۸۵۶ در شهر فرانکفورت در آلمان اقامت گزید . تحصیلات ابتدایی کانتور در شهر سن پترزبورگ و فرانکفورت انجام گرفت . در سن ۱۵ سالگی تحصیلات متوسطه را در شهر ویسبادن

شروع نمود . تحصیلات عالی را در دانشگاه دورینگ آرد و در برلین در رشته های فلسفه ، فیزیت و ریاضی ادامه داد . اسناد او در دانشگاه برلین عبارت بودند از کومر ، وایرشتراس و کرونگرکه بعدها دشمن او شد .

سال ۱۸۷۲ ، سال انتشار اولین اثر انقلابی کانتور یعنی تئوری مجموعه هاست . در عین حال سال ازدواج او نیز می باشد . او در سن ۲۹ سالگی با والی گونمان ازدواج کرد و صاحب دو پسر و چهار دختر شد که هیچ کدام استعداد پدر را نداشتند .

حالت تری و خیره کننده ترین نتایج تئوری کانتور در مورد مجموعه های شمارش ناپذیر او به دست آمده است که روشن ترین و ساده ترین مثال آن عبارت است از مجموعه نقاط واقع بر يك قطعه خط .

تئوری کانتور در باره بی نهایت واقعی و در باره حساب اعداد مابوق بی نهایت ( ترانسفینی ) شامل بسیاری مسائل اساسی دیگر است که بیان همه آنها در این صفحه امکان پذیر نیست . از ابتدای قرن بیستم به تدریج در همه جا اثر کانتور یعنی تئوری مجموعه ها به عنوان یکی از اساسی ترین پیشرفت ها در تمام شاخه های ریاضی و خاصه در اساس آنالیز پذیرفته شد . امروز ، تئوری انقلابی کانتور تبدیل به يك تئوری کلاسیک شده است که بدون اطلاع از آن لااقل نهم نیمی از مطالب ریاضیات امکن پذیر نیست .

کانتور روز ششم ژانویه ۱۹۱۸ در شهر هال و در هنگامی که سوخ او بر حنایان آشکار می شده در سن ۷۳ سالگی بدرود جهان گفت .

# قسمت دوم — نظریه مجموعه‌ها

## ۱ فصل

### مجموعه‌ها

#### مفهوم مجموعه

«مجموعه» یکی از مفاهیم ریاضی (مانند مفاهیم نقطه و خط در هندسه) می‌باشد که تعریف شده است. منظور از یک «مجموعه» دسته‌ای است از اشیائی که کاملاً مشخص شده باشد. به‌عنوان مثال «دانش‌آموزان دبیرستان‌های شهرستان کرج در سال تحصیلی جاری» «خام» «خوارزمی و عیث‌الدین جمشید کاشانی» «عددهای ۳، ۵ و ۴-» و «شهرهای کازرون، بوشهر و نظیر» هر کدام یک مجموعه می‌باشند و حال آن‌که مثلاً «دانش‌آموزان خوب دبیرستانهای ایران در سال تحصیلی جاری» یک مجموعه نیست زیرا صفت «خوب» تعریف نشده است. به بیان دیگر می‌توان گفت که یک مجموعه دسته‌ای از اشیائی کاملاً مشخص می‌باشد که هر شیء مفروض است به این مجموعه یکی از دو وضع متمایز زیر را دارا است:

۱- آن شیء متعلق به مجموعه باشد.

۲- آن شیء متعلق به مجموعه نباشد.

اشیائی که مجموعه را تشکیل می‌دهند به نام عضوهای (عصرهای) مجموعه خوانده می‌شوند. مثالهای زیر مفهوم مجموعه را روشن‌تر می‌سازند:

۱- مجموعه اعداد: ۲، ۴، ۶، ۸

۲- مجموعه روزهای هفته

۳- مجموعه شهرهای: کازرون، بوشهر، نظیر

۴- مجموعه حروف صدادار الفبای انگلیسی

۵- مجموعه عددهای:  $\pi$ ،  $\sqrt{2}$ ،  $-\frac{1}{3}$

۶- مجموعه رنگهای پرچم ایران

۷- مجموعه رودهای: کارون، ارس، زاینده رود

۸- مجموعه شهرستانهای ایران که به «ن» ختم می‌شوند

۹- مجموعه نامهای: سعدی، قلم، اتوبوس

۱۰- مجموعه اعداد فرد



در مثالهای فوق، مجموعه‌های با شماره فرد به طریق نوشتن عضوها یا نام بردن اعضا و مجموعه‌های با شماره زوج با بیان خاصیتی معین مشخص شده‌اند.  
 دیده می‌شود که هیچ نوع محدودیتی در نوع عضوهای يك مجموعه وجود ندارد. عضوهای يك مجموعه می‌تواند اعداد، نقاط، خطوط، حروف الفبا، اشخاص، شهرها، ... باشد.  
 باید توجه داشت که هر جمله که يك دسته از اشیا را معین می‌کند يك مجموعه را مشخص نمی‌سازد. مثلاً:

«سه نفر از شعرای معروف ایران»

يك مجموعه نیست. زیرا، مولوی یکی از شعرای معروف ایران است، ولی آیا مولوی به این گروه سه نفری تعلق دارد یا نه مشخص نیست. همچنین:

«سه تابلو از نقاشیهای زیبای جهان»

يك مجموعه نیست زیرا سلیقه افراد در انتخاب سه تابلوی زیبای دنیا با هم فرق دارد پس هر گدھی از اشیا که مشخص نباشد، مجموعه نیست  
 در نتیجه وقتی برای يك دسته از اشیا کلمه مجموعه به کار برده می‌شود مأمراً این دسته از اشیا باید مشخص باشد، زیرا:

هر مجموعه با عضوهای خود مشخص می‌شود

### نمایش مجموعه

مجموعه را معمولاً با حروف بزرگ الفبای لاتین،  $A, B, C, X, Y, \dots$  نشان می‌دهند. همچنین مجموعه  $A$  با عضوهای  $a, b, c$  را به صورت زیر می‌نویسند:

$$A = \{a, b, c\}$$

در مواردی که عدد عضوهای مجموعه زیاد و نوشتن تمام اعضا مشکل بوده یا امکان‌پذیر نباشد، مثل مجموعه اعداد طبیعی کوچکتر از ۱۰۰۰، در این صورت، تعداد نوشتن چند عضو به نقطه‌گذاری، آنگاه عضو آخر را می‌نویسند:

$$B = \{1, 2, 3, \dots, 999\}$$

یا همان‌طور که در دوره راهسازی خوانده‌اید مجموعه اعداد طبیعی را به صورت زیر نمایش می‌دهند:

$$N = \{1, 2, 3, \dots\}$$

یعنی بعد از نوشتن چند عضو به نقطه قرار می‌دهند که مفهوم آن نامتناهی بودن عدد عضوهای مجموعه است.

مجموعه:

$$A = \{a, b, c\}$$

را به صورت زیر نیز نمایش می دهند :

$$A = \{ x \mid \text{یکی از حروف اول تا سوم الفبای لاتین است} \}$$

و می خوانند که مجموعه A دارای سه عضوهای x به نامی که یکی از حروف اول تا سوم الفبای لاتین است.

بعضی ترتیب مجموعه اعداد طبیعی کوچکتر از ۱۰۰ (مجموعه B بالا) را چنین می نویسند :

$$B = \{ x \mid \text{عدد طبیعی کوچکتر از هزار است} \}$$

و می خوانند که مجموعه B دارای است با عضوهای x به نامی که x عدد طبیعی کوچکتر از هزار است.

بالاخره مجموعه اعداد طبیعی را به شکل زیر نشان می دهند :

$$N = \{ x \mid \text{x عدد طبیعی است} \}$$

و می خوانند که مجموعه N دارای است با عضوهای x به نامی که x عدد طبیعی است.

این طرز نمایش مجموعه را نمایش مجموعه با علائم ریاضی می خوانند.

حرف x که برای نمایش عضو دلخواه مجموعه به کار می رود به نام متغیر خوانده می شود.

متغیر حرف x علائمی است که می تواند جانشین هر عضو مجموعه شود. متغیر را با y و z

نیز نشان می دهند. به طور کلی در نمایش مجموعه دلخواه A با علائم ریاضی می نویسیم :

$$A = \{ x \mid \text{x دارای خاصیت مشخصی است} \}$$

مثال - مجموعه های زیر را با علائم ریاضی نشان دهید :

$$A = \{ ۱۱, ۱۳, ۱۷, ۱۹ \}$$

$$B = \{ \text{خرداد, اردیبهشت, فروردین} \}$$

$$C = \{ ۳, ۶, ۹, \dots \}$$

$$D = \{ a, e, i, o, u \}$$

حل :

$$A = \{ x \mid ۱۰ < x < ۲۰ \text{ است} \}$$

$$B = \{ x \mid \text{x ماه فصل بهار است} \}$$

$$C = \{ x \mid \text{x عدد طبیعی و ضرب ۳ است} \}$$

$$D = \{ x \mid \text{x حرف صدادار انگلیسی است} \}$$

مجموعه های فوق را بنویسید.

### تعلق و عضویت

در صورتی که یکی از اعضای مجموعه را تشکیل می دهند عضوهای مجموعه نامیده شد. در مجموعه :

$$A = \{ ۲, ۴, ۶, ۸ \}$$

اعداد ۲، ۴، ۶، ۸ را عضوهای A و هر کدام از این اعداد را يك عضو این مجموعه می‌گوییم.  
برای بیان عضویت عدد ۲ در مجموعه A می‌نویسیم:

$$2 \in A \quad \text{یا} \quad 2 \in \{2, 4, 6, 8\}$$

و می‌خوانیم «۲ متعلق به A است» یا «۲ عضو A است» یا «۲ در A است»

بهمین ترتیب برای سایر عضوهای A می‌نویسیم:

$$2 \in A, 4 \in A, 6 \in A, 8 \in A$$

در مجموعه A، عدد ۵ عضو مجموعه نیست. برای بیان این مطلب می‌نویسیم:

$$5 \notin A \quad \text{یا} \quad 5 \notin \{2, 4, 6, 8\}$$

می‌خوانیم «۵ متعلق به A نیست» یا «۵ عضو A نیست» یا «۵ در A نیست».

### تمرین

- ۱- کدام يك از توصیفهای زیر، مجموعه  $A = \{2, 4, 6, 8\}$  را مشخص می‌سازد؟
  - الف - چهار عدد زوج متوالی
  - ب - اعداد زوج کوچکتر از ۱۰
  - ج - اعداد طبیعی زوج بین ۱ و ۹
  - د - چهار مضرب متوالی ۲
  - ۲- کدام يك از توصیفهای زیر، يك مجموعه را مشخص می‌سازد؟
    - الف - اعداد طبیعی کوچکتر از صد
    - ب - مردان شیک‌پوش جهان
    - ج - شعرای معروف جهان
    - د - مردم خوشبخت روی زمین
    - ه - اعداد طبیعی زوج
    - و - دانش‌آموزان ایران در سال جاری
    - ۳- مجموعه‌های زیر را که با بیان «خاصیتی معین» مشخص شده‌اند، يك‌بار با روشن کردن اعضا و يك بار با علامت ریاضی نشان دهید:
      - الف - مجموعه اعداد طبیعی فرد بین ۱۲ و ۱۲ (غیر از يك و ۱۲)
      - ب - مجموعه اعداد طبیعی بین ۵۰ و ۵۰ که مربع کامل هستند (غیر از يك و ۵۰)
      - ج - مجموعه ماههای پاییز
      - د - مجموعه تمام اعداد طبیعی دو رقمی مضرب ۷
      - ه - مجموعه اقیانوسهای کره زمین

۱- مجموعه قاره‌های خشکی زمین

ز - مجموعه کشورهای همایه ایران

۲- مجموعه‌های زیر را که با نوشتن عضوهای مشخص شده‌اند با علامت ریاضی بنویسید:

$$A = \{ a, b, c, d \}$$

$B = \{ \text{بہار، قابستان، ہائیز، زمستان} \}$

$$C = \{ \gamma, \varphi, \psi, \lambda, 10, 12, 14 \}$$

$$D = \{\gamma, \tau, \delta, \gamma, 11, \dots\}$$

$$E = \{1, 3, 5, 7, 9, \dots\}$$

۵- مجموعه‌ای زیر با علائم ریاضی مشخص شده‌اند. آنها را «با نوشتن عضوها»

$$A = \{ x \mid x \in \mathbb{N} : \exists x - 10 = 0 \}$$

$$B = \{ x \mid x \in \mathbb{N} \wedge x < 0 \}$$

$$C = \{x \mid \text{نام یکی از روزهای هفته است}\}$$

$$D = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x > a\}$$

۶- مجموعه‌های  $A = \{۲, ۴, ۶, ۸\}$  و  $B = \{۱, ۳, ۵, ۷\}$  و  $C = \{a, b, c\}$  داده شده‌اند. از گزاره‌های زیر کدام درست است ؟

$$r \in A : r \in B : a \in B : a \in A : b \in C : r \in A : r \in B$$

$$y \notin A : b \in B : d \in C : c \in A : y \notin B : y \in A : n \in C$$

مجموعہ تھی

در دورهٔ راهمایی خوانده‌اید که در اروپا حتی تا قرن ۱۶ میلادی برای شمارش و عدد

نویسی از ارقام رومی :

I , V , X , L , C , D , M

1 : Δ = 10 : Δ0 = 100 : Δ00 = 1000

استفاده می‌شود. همچنین حروف ابجد:

.....ح ۱۰۰ ر ۱۰۱ و ۱۰۲ د ۱۰۳ ج ۱۰۴ پ ۱۰۵

در کشورهای عربی زبان برای عدد نویسی به کار می رفت. چنان که ملاحظه می شود در هر دو مورد عدد صفر وجود نداشته است. صفر به معنای تهی یا خالی است که اندک آن موجب آسانی کار عدد نویسی گردید.

صحن مطالعه در مجموعه‌ها بر موحه شدند که وجود مجموعه تهی موحب آسانی وعموبت دادن دستورهای مجموعه‌ها خواهد شد. لذا، مجموعه تهی را معرفی و آن را به صورت زیر تعریف کرده‌اند:

مجموعه تهی یعنی مجموعه‌ای که عضو نداشته باشد.

مجموعه تهی را با علامات:

$$\{\} \text{ یا } \emptyset$$

نمایش می‌دهد. این مجموعه را باید با مجموعه  $\{\emptyset\}$  یا  $\{\emptyset\}$  که هر کدام دارای يك عضو است اشتباه کرد. برای روشن شدن مطلب، در زیر چند مثال از مجموعه تهی ذکر شده است:

- ۱- مجموعه اعداد طبیعی بین ۱۰ و ۹
- ۲- مجموعه اعداد اول بین ۲۸ و ۲۲
- ۳- مجموعه انسانهایی که در کره خورشید زندگی می‌کند
- ۴- مجموعه اعداد زوج اول بزرگتر از ۳
- ۵- مجموعه مثلثهای صفحه که مجموع گوشه‌های داخلی آنها  $۲۰۰^\circ$  باشد

نمایش هندسی مجموعه

در دوره راهنمایی مجموعه:

$$A = \{ \text{کتاب}, \text{تخته}, \text{گوشه}, \text{تخته}, \text{کتاب} \}$$

به صورت:



و مجموعه:

$$B = \{a, b, c, d\}$$

به صورت:

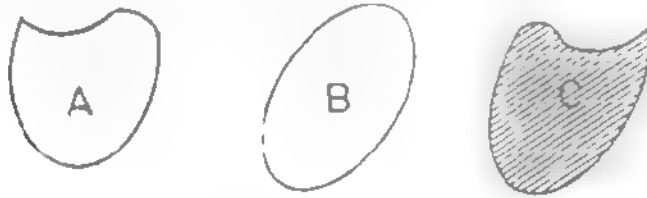
۱۱



شان داده شده است. این طریق نشان دادن مجموعه به نام:

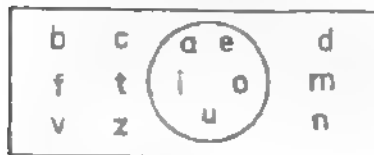
### نمایش هندسی یا نمایش مجموعه با نمودار ون<sup>۱</sup>

حواله می‌شود. این روش اولین بار به وسیله «ون» ریاضی‌دان معروف انگلیسی به کار برده شد. و در حالت کلی مجموعه را با قسمتی از نقطه صفحه محدود به یک دایره، یک مستطیل یا هر سطحی بنا دیگری نمایش داد و هر نقطه داخل شکل را یک عضو مجموعه فرض نمود. گاهی احواله حتی شکلی را که برای نمایش مجموعه به کار می‌رود هشود می‌رشد. در ر مجموعه‌های A و B و C با استفاده از این روش نشان داده شده‌اند:

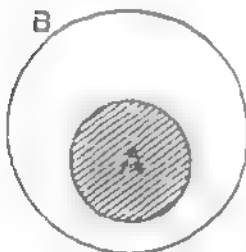


### زیر مجموعه‌های یک مجموعه

هر یک از دانش‌آموزان، دبستانهای تهران یکی از دانش‌آموزان دبستانهای ایران نیز می‌باشد.



هر حرف صدا دار انگلیسی یکی از حروف الفبای انگلیسی نیز هست.



اگر B نمایش مجموعه ۳۲ مهره شطرنج و A نمایش مجموعه ۱۶ مهره پاده آن باشد، روشن است که هر یک از عضوهای مجموعه A یکی از عضوهای مجموعه B نیز می‌باشد.

۱- نمودار «اولر-ون» نیز خوانده می‌شود.

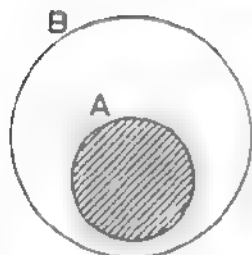
تعریف - مجموعه  $A$  را (زیرمجموعه  $B$  نامند هرگاه هر عضو  $A$  ، عضو  $B$  نیز باشد .  
به عبارت دیگر :

مجموعه  $A$  زیرمجموعه  $B$  است هرگاه برای هر  $x \in A$  نتیجه شود که  $x \in B$  .

اگر  $A$  زیر مجموعه  $B$  باشد می نویسیم :

$$A \subset B$$

و نمایش هندسی آن بصورت شکل مقابل می باشد .  
و تعریف آن با زبان ریاضی بصورت زیر است :



$$(A \subset B) \leftrightarrow (x \in A \rightarrow x \in B)$$

مثالهای زیر مفهوم زیر مجموعه را روشن تر می سازند:

$$\{e, i, u\} \subset \{a, e, i, o, u\}$$

$$\{3, 4, 5\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

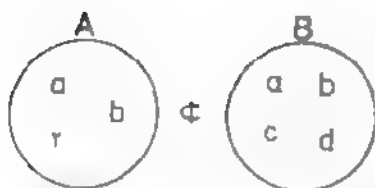
$$\{\square, \triangle\} \subset \{\square, \triangle, \diamond, \bigcirc\}$$

اگر  $A$  زیرمجموعه  $B$  نباشد می نویسند :

$$A \not\subset B$$

و این به مفهوم آن است که :

لااقل يك عضو در  $A$  وجود دارد که در  $B$  نیست .



و با زبان ریاضی :

$$(A \not\subset B) \leftrightarrow (\exists x \text{ و } x \in A \wedge x \notin B)$$

از تعاریف فوق نتیجه می شود که :

۱- هر مجموعه زیرمجموعه خودش است .

یعنی ، اگر  $A$  مجموعه دلخواهی باشد داریم :

$$A \subset A$$

زیرا ، اگر  $A$  زیرمجموعه  $A$  نباشد ، یعنی ،

$$A \not\subset A$$

در این صورت ، در  $A$  با ۱ عضو وجود داشته باشد که در  $A$  نباشد و این شدنی است

۲- مجموعه تهی زیرمجموعه هر مجموعه است.

یعنی، اگر  $A$  مجموعه دلخواهی باشد داریم:

$$\emptyset \subset A$$

ریا، اگر  $\emptyset$  زیر مجموعه  $A$  نباشد در این صورت، در  $\emptyset$  باید عضوی باشد که در  $A$  نباشد و چون در مجموعه تهی عضوی وجود ندارد لذا این نشدنی است.

مثال ۱- دو مجموعه  $A = \{5, 6, 7\}$  و  $B = \{1, 2, 5, 6\}$  را در نظر بگیرید،

$A$  یا  $B$  زیرمجموعه  $A$  است؟

حل:  $A$  زیرمجموعه  $B$  نیست زیرا در  $A$  عضو ۷ وجود دارد که در  $B$  نیست.

مثال ۲- تمام زیرمجموعه‌های مجموعه:

$$A = \{a, b, c\}$$

را بنویسید.

حل: الف - طبق آنچه گفته شد  $\emptyset$  زیرمجموعه  $A$  است

ب - زیرمجموعه‌های یک عضوی عبارتند از  $\{a\}, \{b\}, \{c\}$

ج - زیرمجموعه‌های دو عضوی عبارتند از  $\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}$

د - تنها زیرمجموعه سه عضوی خود مجموعه یعنی  $\{a, b, c\}$  می‌باشد.

در این مثال عدد عضوهای  $A$  برابر ۳ و عدد زیرمجموعه‌های آن یعنی  $2^3$  می‌باشد.

مثال ۳- تمام زیرمجموعه‌های مجموعه:

$$B = \{1, 2, 3, 4\}$$

را بنویسید.

حل:

- زیرمجموعه بدون عضو:

$$\emptyset$$

- زیرمجموعه‌های یک عضوی:

$$\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}$$

- زیرمجموعه‌های دو عضوی:

$$\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}$$

- زیرمجموعه‌های سه عضوی:

$$\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 3, 4\}$$

- زیرمجموعه چهار عضوی:

$$\{1, 2, 3, 4\}$$

در این مثال عدد عضوهای  $B$  برابر ۴ و تعداد زیرمجموعه‌هایش  $2^4$  یعنی ۱۶ است. ما استفاده



از این دوستان ، آیا می‌توانید تعداد زیرمجموعه‌های يك مجموعه که دارای  $n$  عضو متمایز است ، حدس بزنید ؟

مثال ۴ - در مجموعه  $A = \{a, b, c\}$  ، دو مفهوم زیر با هم چه فرقی دارند .

$$a \in \{a, b, c\}$$

$$\{a\} \subset \{a, b, c\}$$

حل : اولی به معنای این است که  $a$  عضو  $A$  می‌باشد ، ولی دومی بیان می‌کند که مجموعه  $\{a\}$  ( یک‌عضوی ) زیرمجموعه‌ای از  $A$  است. توجه به اختلاف این دو مفهوم ضروری است.

به مطلب زیر توجه کنید :

برای هر سه مجموعه  $A, B$  و  $C$  ، هرگاه  $A$  زیرمجموعه  $B$  و  $B$  زیرمجموعه  $C$  باشد ، آن‌گاه  $A$  زیرمجموعه  $C$  است .  
به عبارت دیگر ، از  $ACB$  و  $BCC$  نتیجه می‌شود  $ACC$  و  
یا بزبان ریاضی :

$$(ACB \wedge BCC) \Rightarrow ACC$$

برای نشان دادن درستی مطلب فوق ، در فرض داریم :

$$\therefore x \in A \Rightarrow x \in B \quad (1) \quad \text{طبق تعریف زیرمجموعه :}$$

(به نقطه یعنی نتیجه می‌شود)

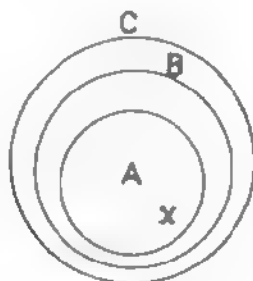
$BCC$  همچنین در فرض داریم :

$$\therefore x \in B \Rightarrow x \in C \quad (2) \quad \text{طبق تعریف زیرمجموعه :}$$

از مقایسه (۱) و (۲) نتیجه می‌شود :

$$x \in A \Rightarrow x \in C$$

$$\therefore ACC \quad \text{طبق تعریف زیرمجموعه}$$



مثال ۹ - شکل‌های زیر مثال‌هایی جهت نشان دادن دوستی مطلب فوق می‌باشد.

مجموعه گیاهان گلدار      مجموعه حیوانات پستاندار      مجموعه متواری الاصل‌ها



### مجموعه‌های مساوی

هرگاه  $P = \{۲, ۵, ۷\}$  و  $Q = \{۵, ۷, ۳\}$  مفروض باشند، با توجه به این که:

هر مجموعه با عضوهای خود مشخص می‌شود

و  $Q$  هر دو نام یک مجموعه می‌باشد. به عبارت دیگر، ما یک مجموعه داریم نه دو مجموعه. نتایج این مطلب را به صورت:

$$P=Q$$

نشان داده می‌گیریم  $P$  و  $Q$  مساوی هستند.

مجموعه‌های  $A = \{۱, ۲, ۳\}$  و  $B = \{۱, ۲, ۳\}$  نیز مساویند. یعنی:

$$A=B$$

همچنین در مورد دو مجموعه:

$C = \{a, h, c\}$  و  $D = \{x \mid x \text{ یکی از سه حرف اول الفبای لاتین است}\}$

می‌توان نوشت:

$$C=D$$

تعریف - مجموعه  $A$  مساوی مجموعه  $B$  است، هرگاه هر عضو  $A$ ، عضو  $B$  بوده و هر عضو

B نیز عضو A باشد.

یعنی دو مجموعه A و B را مساوی گوئیم هرگاه داشته باشیم:

$$A \subset B$$

و

$$B \subset A$$

$$(A=B) \iff (A \subset B \wedge B \subset A)$$

یا

از این تعریف معمولا برای اثبات تساوی دو مجموعه استفاده می‌شود.

مثال - هرگاه

$$A \subset \emptyset \quad (1)$$

نشان دهید که:

$$A = \emptyset$$

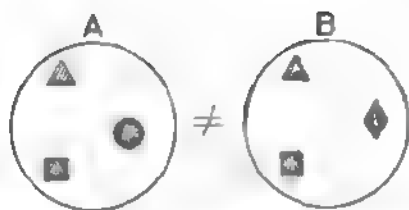
حل: چون  $\emptyset$  زیرمجموعه هر مجموعه است پس،

$$\emptyset \subset A \quad (2)$$

از مقاسه (1) و (2) ما توجه به تعریف فوق نتیجه می‌شود که  $A = \emptyset$

دو مجموعه نامساوی

هرگاه دو مجموعه A و B مساوی نباشند می‌نویسیم:



$$A \neq B$$

در این صورت حداقل یک عضو در یکی وجود دارد که به دیگری تعلق ندارد.

$$(A \neq B) \iff (\exists x \text{ و } x \in A \wedge x \notin B) \vee (\exists x \text{ و } x \in B \wedge x \notin A)$$

مثال - آیا دو مجموعه  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  و  $B = \{1, 2, 5\}$  مساویند؟

حل: چون در مجموعه A عضوی وجود دارد که در B نیست، دو مجموعه A و B مساوی

نیستند. یعنی،  $\{1, 2, 3, 4\} \neq \{1, 2, 5\}$

تذکره ۱- فرض کنیم  $A = \{a, b, c\}$ ، از آنچه در بالا دیدید نتیجه می‌شود که:

الف - اگر عضوهای مجموعه A تکرار شوند، مجموعه‌ی مساوی A بدست می‌آید:

$$A = \{a, b, c\}$$

$$= \{a, a, b, b, c\}$$

به عبارت دیگر، در نوشتن يك مجموعه تکرار اعضا بی اثر است.

ب - اگر حای عضوهای مجموعه A با هم عوض شوند، مجموعه‌ای مساوی A بدست

می آید:

$$A = \{a, b, c\}$$

$$= \{b, a, c\}$$

به عبارت دیگر، در نوشتن يك مجموعه ترتیب اعضا مهم نیست.

ج - مجموعه A را می توان بطریق نام بردن اعضا یا با علائم ریاضی نشان داد:

$$A = \{a, b, c\}$$

$$= \{x \mid x \text{ یکی از سه حرف اول الفبای لاتین است} \mid x\}$$

تذکر ۲ - هرگاه A و B و C سه مجموعه دلخواه باشند، دیدیم که:

$$A \subset A$$

ب - اگر  $A \subset B$  و  $B \subset A$ ، آن گاه  $A = B$ ، یا

$$(A \subset B \wedge B \subset A) \Rightarrow A = B$$

ج - اگر  $A \subset B$  و  $B \subset C$ ، آن گاه  $A \subset C$ ، یا

$$(A \subset B \wedge B \subset C) \Rightarrow A \subset C$$

همچنین در مورد تساوی مجموعه‌ها داریم (چرا؟):

$$A = A$$

$$(A = B) \Rightarrow (B = A)$$

ب - اگر  $A = B$ ، آن گاه  $B = A$ ، یا

ج - اگر  $A = B$  و  $B = C$ ، آن گاه  $A = C$ ، یا

$$[(A = B) \wedge (B = C)] \Rightarrow (A = C)$$

### تعریف

۱- با چهار مثال مختلف مجموعه تهی را معرفی کنید.

۲- چهار مثال برای مجموعه يك عضوی بنویسید.

۳- مجموعه اعداد زوج اول، يك مجموعه چند عضوی است؟

۴- آیا مجموعه اعداد اول، زیرمجموعه اعداد فرد است؟ چرا؟

۵- مفاهیم زیر را با استفاده از علامات  $\in$ ،  $\notin$ ،  $\subset$ ،  $\supset$  نشان دهید. « $a$  متعلق به  $A$  است».

« $A$  زیرمجموعه  $F$  است»، « $A$  زیرمجموعه  $B$  نیست»، « $b$  عضوی از  $B$  است»، « $B$  زیرمجموعه

$D$  است»، « $b$  در  $F$  است»، «مجموعه  $D$  شامل عضوهای مجموعه  $F$  است»، «هیچ عضوی در  $F$

نیست که در مجموعه  $F$  نباشد»، «در  $A$  عضوی هست که در  $F$  نیست».

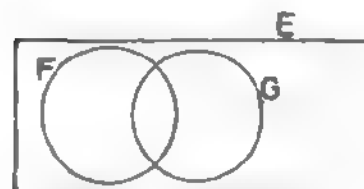
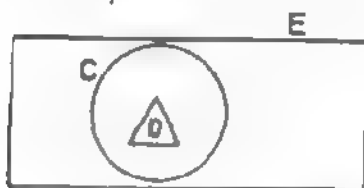
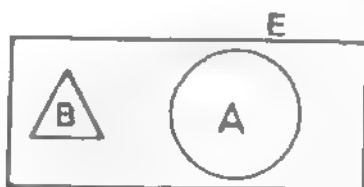
۶- مجموعه‌های  $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  و  $F = \{2, 4, 6, 8\}$  و  $G = \{2, 4\}$

را در نظر بگیرید، از گزاره‌های زیر کدام درست است؟

$F \subset E$ ،  $G \subset F$ ،  $G \subset G$ ،  $G \subset F \subset E$

۷- در شکل‌های پایین رابطه بین مجموعه‌ها با نمودار ون نمایش داده شده است. این روابط

را با استفاده از علامت  $\subset$  نشان دهید.



۸- هرگاه  $N$  و  $E$  و  $F$  و  $P$  به ترتیب نمایش مجموعه‌های: اعداد طبیعی، اعداد زوج مثبت،

اعداد فرد مثبت و اعداد اول باشند، کدام یک از گزاره‌های زیر درست است:

$E \subset N$ ،  $E \subset F$ ،  $P \subset E$ ،  $P \subset N$ ،  $\emptyset \subset P$ ،  $F \subset N$

۹- گزاره‌های زیر را با استفاده از نمودار ون نمایش دهید:

$F \subset N \subset O$ ،  $E \subset N \subset Z$ ،  $P \subset O \subset R$

۱۰- مجموعه مساوی هر یک از مجموعه‌های زیر را بنویسید:

$\{a, a, b, b\}$ ،  $\{1, 2, 2, 3, 3, 5\}$ ،  $\{3, 3, 5, 5\}$

## ۱۱- مجموعه :

$$A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ و } 1 \leq x \leq 9\}$$

را در نظر بگیرید ، سپس با استفاده از علائم ریاضی ، مجموعه‌های زیر را بنویسید :

الف - زیرمجموعه‌ای از  $A$  که عضوهای آن زوج باشد .

ب - زیرمجموعه‌ای از  $A$  که عضوهای آن فرد باشد .

۱۲- تمام زیرمجموعه‌های مجموعه  $A = \{a, e, i, o, u\}$  را بنویسید .

۱۳- تعداد همه زیرمجموعه‌های يك مجموعه  $2^{11}$  است . این مجموعه چند عضو دارد .

۱۴- عبارات زیر را کامل کنید :

الف - از  $DCE$  و  $EDC$  نتیجه می‌شود که . . . .

ب - از  $ECF$  و  $CKF$  نتیجه می‌شود که . . . .

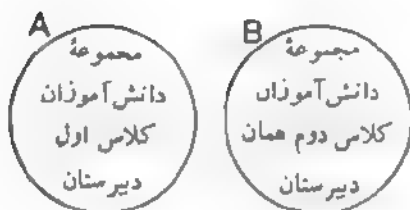
ج - از . . . . و  $K \subset L$  نتیجه می‌شود که  $K = L$

۱۵- دو گزاره  $A \not\subset B$  و  $A \neq B$  چه فرقی دارند ؟

۱۶- حوصله علامت  $\subset$  در مجموعه‌ها با حوصله علامت  $\subseteq$  (کوچکتر یا مساوی است) در

اعداد را باهم مقایسه کنید .

## دو مجموعه جدا از هم



گر  $A$  مجموعه دانش آموزان کلاس اول

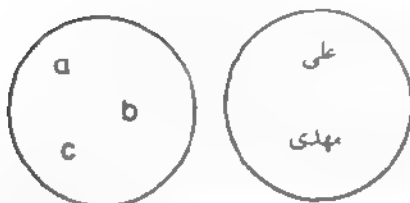
يك دبیرستان و  $B$  مجموعه دانش آموزان کلاس

دوم همان دبیرستان فرض شود ، روشن است که

هیچ دانش آموزی در دو کلاس تحصیل نمی‌کند.

به عبارت دیگر دو مجموعه  $A$  و  $B$  دارای عضو مشترکی نیستند .

همچنین مجموعه‌های :

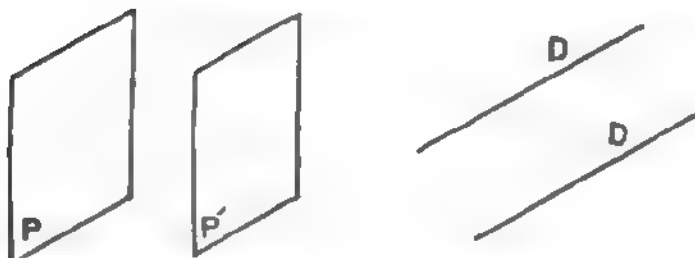


$\{a, b, c\}$  ،  $\{\text{علی} ، \text{مهدی}\}$

عضو مشترکی ندارند .

در هندسه ، هرگاه خط و صفحه مجموعه‌ای از نقاط فرض شوند دو خط متوازی غیرمطلق

یا دو صفحه متوازی غیر منطبق مجموعه‌های جدا از هم می‌باشند.



تعریف - دو مجموعه ناتهی که دارای هیچ عضو مشترکی نباشد، دو مجموعه جدا از هم خوانده می‌شوند.

### مجموعه مرجع (جهانی)

در مطالعه مجموعه‌ها ما با دسته‌های مختلف اشیاء سروکار داریم. لذا برای روشن بودن مطلب و جلوگیری از ابهام ضرورت دارد که تمام اشیای مورد بحث را مشخص نماییم. به مجموعه این اشیای مورد نظر مجموعه مرجع گفته می‌شود. در حساب و جبر اشیای مورد بحث معمولاً اعداد حقیقی می‌باشد. مجموعه اعداد حقیقی را مجموعه مرجع در حساب و جبر در نظر می‌گیریم. در هندسه سطح، معمولاً اشیای مورد نظر مجموعه نقاط صفحه است، بنابراین مجموعه نقاط صفحه را می‌توان بعنوان مجموعه مرجع در هندسه سطح گرفت. وقتی از اشخاص صحبت می‌شود مجموعه مرجع می‌تواند مجموعه انسانها باشد. وقتی از رویدادها گفتگو می‌کنیم، مجموعه مرجع می‌تواند مجموعه گیاهان باشد.

دایک بحث معین، تمام عضوهای مجموعه‌های مورد مطالعه متعلق به مجموعه‌ای موسوم به مجموعه مرجع می‌باشند. به عبارت دیگر، هر بحث دلخواه گفتگویی است در باره زیرمجموعه‌های يك مجموعه مرجع.

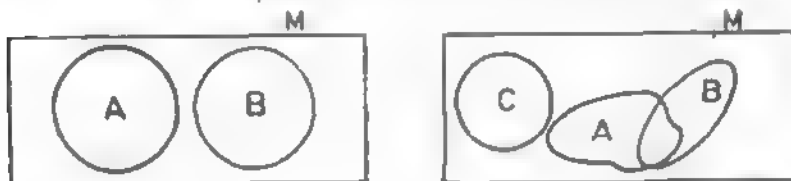
مجموعه مرجع را با حرف  $M$  نمایش می‌دهیم. اگر  $M$  مجموعه مرجع باشد هر مجموعه مورد بحث زیرمجموعه‌ای از  $M$  می‌باشد.

باید توجه داشت که به مقتضای بحث، مجموعه‌های مختلفی را می‌توان به عنوان مجموعه مرجع انتخاب کرد. همچنین وقتی از مجموعه‌های  $A$ ،  $B$ ،  $C$ ، ... بحث می‌شود ما این مجموعه‌ها را زیرمجموعه‌های يك مجموعه مرجع فرض می‌کنیم و اعمالی که روی آنها انجام می‌دهیم با توجه به این فرض می‌باشد.

---

۱- در این کتاب حرف  $M$  را منحصرأ برای مجموعه مرجع به کار می‌بریم.

از نظر نموداری، مجموعه مرجع را معمولاً به شکل مستطیل و مجموعه‌های مورد مطالعه را به شکل دایره و یا هرمحنی بسته دیگری داخل آن نشان می‌دهیم.



### متمم يك مجموعه

هرگاه مجموعه دانش‌آموزان کشور را مجموعه مرجع  $M$  بنامیم، این دانش‌آموزان را ممکن است به دو دسته دختر و پسر تقسیم نمود. اگر  $S$  مجموعه دانش‌آموزان دختر کشور باشد، منظور از متمم  $S$  (نسبت به  $M$ ) که با  $S'$  نمایش داده می‌شود، مجموعه دانش‌آموزانی از کشور است که دختر نیستند.

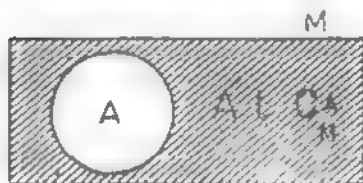
$$S' = \text{متمم } S \text{ (نسبت به } M)$$

**يك مثال ديگر** - اگر مجموعه تمام حروف الفبای فارسی را مجموعه مرجع  $M$  بنامیم، همان طور که می‌دانید، این حروف به دو دسته نقطه‌دار و بی نقطه تقسیم می‌شوند. اگر  $A$  مجموعه حروف نقطه‌دار باشد، منظور از متمم  $A$  (نسبت به  $M$ ) که آن را به  $A'$  نمایش می‌دهیم مجموعه حروفی از الفبای فارسی است که نقطه ندارند.  $A' = \text{متمم } A \text{ (نسبت به } M)$

**تعریف** - اگر  $A$  مجموعه دلخواه و  $M$  مجموعه مرجع باشد، منظور از متمم  $A$ ، مجموعه اعضای  $M$  است که متعلق به  $A$  نباشند.

متمم مجموعه  $A$  (نسبت به  $M$ ) با  $A'$  یا با  $C_M A$  نمایش داده می‌شود. یعنی:

$$A' = C_M A = \text{متمم مجموعه } A$$



۱- متمم  $A'$  را با  $\overline{A}$  نمایش می‌دهند.



ما در این کتاب برای سهولت متهم  $A$  (نست به  $M$ ) در محصرأ با  $A'$  نمایش داده بطور ساده می‌گوییم « $A$  متهم  $A$  است» یعنی از ذکر جمله «نست به  $M$ » خودداری می‌کنیم  $A$  و  $A'$  دو مجموعه جدا از هم می‌باشند . چرا ؟  
با توجه به تعریف فوق می‌توان نوشت:

$$A' = \{ x \mid x \in M \text{ و } x \notin A \}$$

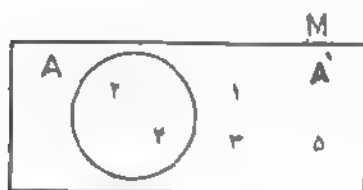
که خوانده می‌شود « $A'$  مجموعه‌ای است با عضوهای  $x$  به قدهی که  $x$  متعلق به  $M$  است و  $x$  متعلق به  $A$  نیست».

از این تعریف نتیجه می‌شود که:

اگر  $x \in A$  ، خواهیم داشت  $x \notin A'$  و

اگر  $x \in A'$  ، خواهیم داشت  $x \notin A$  .

مثال ۱ - مجموعه  $A = \{۲, ۲\}$  از مجموعه مرجع  $M = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$  را در نظر بگیرید ، آنگاه مجموعه  $A'$  را بنویسید .



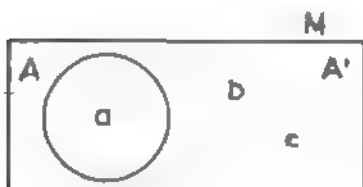
حل :  $M = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$

$$A = \{۲, ۲\}$$

$$A' = \{۱, ۳, ۴, ۵\}$$

$$A' = \{۱, ۳, ۵\}$$

مثال ۲ - مجموعه  $A = \{a\}$  از مجموعه مرجع  $M = \{a, b, c\}$  را در نظر بگیرید ، آنگاه مجموعه  $A'$  را بنویسید .



حل :  $M = \{a, b, c\}$

$$A = \{a\}$$

$$A' = \{b, c\}$$

$$A' = \{b, c\}$$

چند نکته مهم

- ۱

واضح است که اگر دو مجموعه مساوی باشد ،  
متممهای آنها نیز مساوی خواهد بود . به عبارت  
دیگر برای هر دو مجموعه  $A$  و  $B$  ، از  $A = B$   
نتیجه می‌شود  $A' = B'$  .

متمم مجموعه مرجع مساوی مجموعه نهی است.

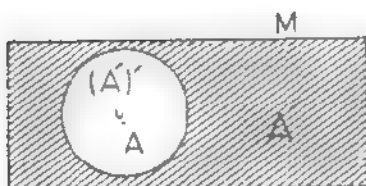
$$M' = \emptyset \quad \text{یعنی:}$$

برای نشان دادن درستی این مطلب، گوئیم منظور از  $M'$  یعنی مجموعه‌ای که عضوهای آن در  $M$  باشد. چون در اینجا  $M$  شامل تمام عضوهای مورد بحث می‌باشد، لذا در  $M'$  عضوی باقی نخواهد ماند. به عبارت دیگر، متمم مجموعه مرجع مجموعه نهی خواهد بود.

متمم متمم يك مجموعه، مساوی خود آن مجموعه

است. یعنی برای هر مجموعه  $A$  داریم:

$$(A')' = A$$



مجموعه  $(A')'$ ، بنا بر تعریف مجموعه

متمم، مجموعه‌ای است که عضوهای آن متعلق به  $M$  بوده و در  $A'$  نباشند. چون هر عضو  $M$  یا متعلق به  $A$  یا متعلق به  $A'$  است پس عضوهای  $M$  که در  $A'$  نباشند به ناچار در  $A$  خواهند بود به عبارت دیگر، مجموعه  $(A')'$  همان

مجموعه  $A$  می‌باشد. این مطلب را با علائم ریاضی به صورت زیر بیان می‌کنند:

$$(A')' = \{x \mid x \in M \text{ و } x \notin A'\}$$

$$= \{x \mid x \in M \text{ و } x \in A\}$$

$$= A$$

متمم مجموعه نهی، مساوی مجموعه مرجع

$$\emptyset' = M \quad \text{است یعنی،}$$

در قسمت ۲ دیدید که:

$$M' = \emptyset$$

در قسمت ۱ نیز گفتیم «اگر دو مجموعه مساوی باشند متممهای آنها نیز مساوی است.» پس:

$$(M')' = \emptyset'$$

در قسمت ۳ نیز دیدید که «متمم متمم يك مجموعه مساوی خود مجموعه است» لذا نتیجه می شود ،

$$M = \emptyset'$$

مثال - مجموعه  $A = \{1, 2\}$  از مجموعه مرجع  $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  را در نظر

$$M' = \emptyset \quad , \quad (A')' = A$$

گرفته نشان دهید که :

$$M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

حل :

$$M' = \{\cancel{1}, \cancel{2}, \cancel{3}, \cancel{4}, \cancel{5}\}$$

$$= \emptyset$$

$$A' = \{\cancel{1}, \cancel{2}, 3, 4, 5\}$$

$$= \{3, 4, 5\}$$

$$(A')' = \{1, 2, \cancel{3}, \cancel{4}, \cancel{5}\}$$

$$= \{1, 2\}$$

$$= A$$

### تمرین

۱- سه مثال برای دو مجموعه جدا از هم بزنید .

۲- آیا مجموعه مردان و مجموعه ریاضی خوانها دو مجموعه جدا از هم هستند ؟

۳- آیا دو مجموعه  $A'$  و  $(A')'$  جدا از هم هستند ؟

۴- سه مجموعه  $A$  و  $B$  و  $C$  را در نظر بگیرید ، کدام يك از گزاره های زیر درست است ؟

الف -  $A$  و  $A$  جدا از هم هستند .

ب - اگر  $A$  و  $B$  جدا از هم باشند ، آن گاه  $A$  و  $B$  نیز جدا از هم هستند .

ج - اگر  $A$  و  $B$  جدا از هم بوده ،  $B$  و  $C$  نیز جدا از هم باشند ، آن گاه  $A$  و  $C$  جدا از هم

نخواهند بود .

۵- عبارات زیر را کامل کنید :

الف - مجموعه اعداد يك رقمی و مجموعه اعداد دو رقمی دو مجموعه ... هستند .

ب - مجموعه اعداد فرد و مجموعه اعداد ... دو مجموعه جدا از هم هستند .

۶ - مجموعه مرجع  $M$  ، مجموعه انسانها فرض شده است . در مثالهای زیر مجموعه معای

را که ممکن است  $M$  مجموعه مرجع آنها انتخاب شود نام ببرید :

الف - مجموعه مردان

ب - مجموعه ریاضی خوانها

ج - مجموعه تاکسهای شهرضا

د - مجموعه فوتبالیستهای تیم ملی ایران

۵ - مجموعه {حافظ ، سمدی ، فردوسی ، مولوی ، خیام}

۷ - اگر دو مجموعه جدا از هم باشند آیا متممهای آنها نیز جدا از هم خواهند بود ؟

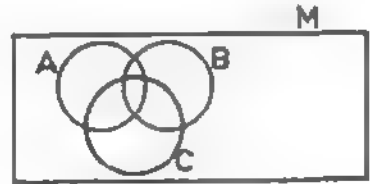
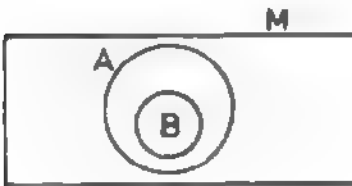
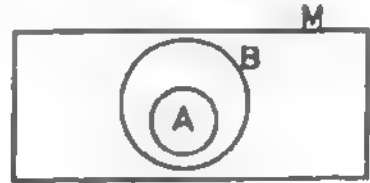
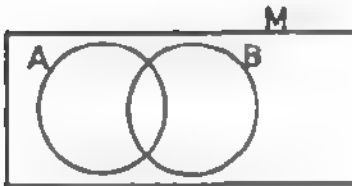
۸ - مجموعه مرجع  $M = \{a, b, c, d, e\}$  و مجموعههای  $A = \{a, c\}$  و

$B = \{d, e\}$  را در نظر بگیرید ، آنگاه :

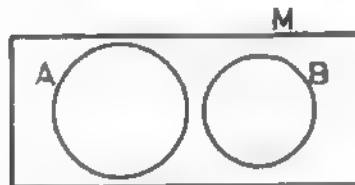
الف - مجموعههای  $A'$  و  $B'$  را بنویسید !

ب - نشان دهید که  $(A')' = A$  و  $M' = \emptyset$

۹ - متمم مجموعه  $A$  را در شکلهای زیر سایه بزنید .



۱۰ - متمم مجموعه  $B$  را در شکل زیر سایه بزنید .



آیا  $ACB'$  ؟ چرا ؟ ثابت کنید.

۱۱ - هرگاه  $A$  و  $B$  دو مجموعه و  $A \subset B$  ، با استفاده از نمودار ون و سایه زدن تحقیق

کند :

الف - آیا  $B' \subset A'$  ؟

ب - آیا  $A$  و  $B'$  جدا از هم هستند ؟

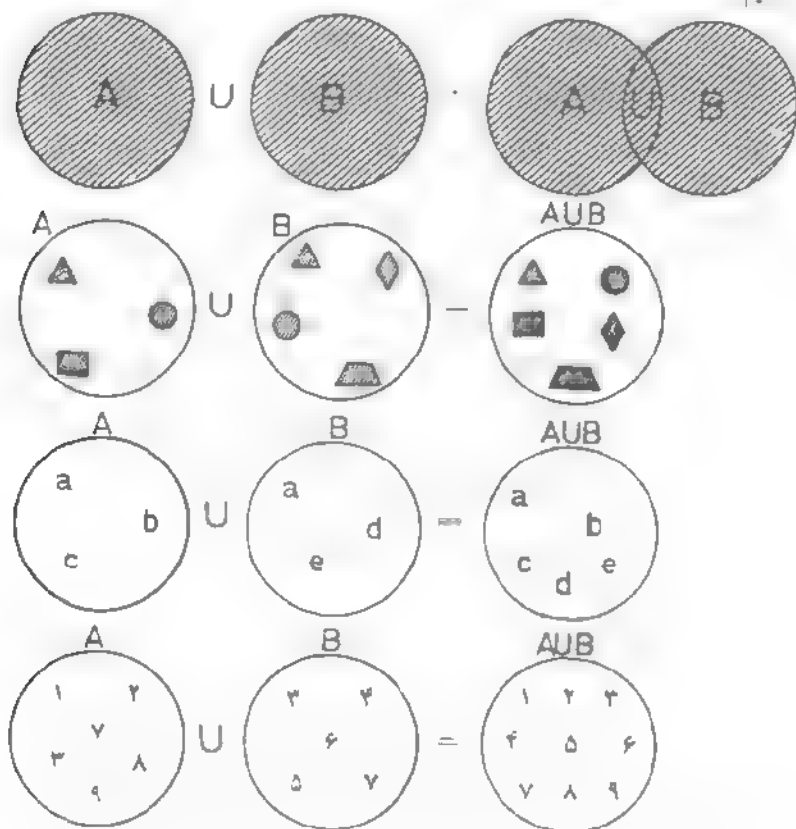
ج - قسمت «ب» را بدون استفاده از نمودار ون ثابت کنید .

## اعمال بین مجموعه‌ها

### اجتماع دو مجموعه

در دورهٔ راهنمایی، اجتماع دو مجموعه  $A$  و  $B$  را با استفاده از نمودار ون به صورت‌های زیر

نمایش دادیم.



تعریف - اجتماع دو مجموعه  $A$  و  $B$  که با نماد  $A \cup B$  نموده می‌شود، مجموعه‌ای است از همهٔ عضوهایی که هرکدام از آنها متعلق به  $A$  یا به  $B$  یا به هر دو باشد، معمولاً «هر دو» را نیز حذف کرده به‌طور اختصار می‌گوییم:

$A \cup B$  ، مجموعه‌ای است از همهٔ عضوهایی که هر عضو متعلق به  $A$  یا متعلق به  $B$  باشد .  
 $A \cup B$  را می‌خوانیم «اجتماع  $A$  و  $B$ »

مثال ۱ - دو مجموعه  $A = \{a, b, c\}$  و  $B = \{b, c, d, e\}$  را در نظر بگیرید. آن‌گاه مجموعهٔ  $A \cup B$  را بنویسید .

$$A = \{a, b, c\} \quad \text{حل :}$$

$$B = \{b, c, d, e\}$$

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{a, b, c\} \cup \{b, c, d, e\} \\ &= \{a, b, c, d, e\} \end{aligned}$$

مثال ۲ - مجموعهٔ  $A = \{1, 3, 5, 7\}$  از مجموعهٔ مرجع  $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  را در نظر بگیرید ، آن‌گاه مجموعه‌های زیر را بنویسید :

$$A \cup A : A \cup \emptyset : A \cup M : A \cup A'$$

$$A = \{1, 3, 5, 7\} \quad \text{حل :}$$

$$A \cup A = \{1, 3, 5, 7\} \cup \{1, 3, 5, 7\}$$

$$A \cup A = \{1, 3, 5, 7\}$$

$$\begin{aligned} A \cup \emptyset &= \{1, 3, 5, 7\} \cup \{ \} \\ &= \{1, 3, 5, 7\} \end{aligned}$$

$$M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

$$\begin{aligned} A \cup M &= \{1, 3, 5, 7\} \cup \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \\ &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \end{aligned}$$

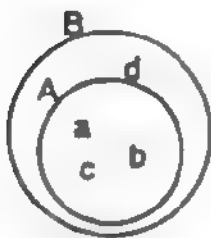
$$\begin{aligned} A' &= \{x \mid x \notin A\} \\ &= \{2, 4, 6\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A \cup A' &= \{1, 3, 5, 7\} \cup \{2, 4, 6\} \\ &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \end{aligned}$$

با توجه به این مثال چه نتایجی را می‌توان حلس زد .

۱- یعنی این «یا» هر دو را نیز شامل است .

مثال ۳ - دو مجموعه  $A = \{a, b, c\}$  و  $B = \{a, b, c, d\}$  را در نظر بگیرید، آنگاه مجموعه  $A \cup B$  را بنویسید.



$$A = \{a, b, c\} \quad \text{حل:}$$

$$B = \{a, b, c, d\}$$

$$\{a, b, c\} \subset \{a, b, c, d\}$$

$$A \cup B = \{a, b, c\} \cup \{a, b, c, d\} \\ = \{a, b, c, d\}$$

از این مثال چه نتیجه‌ای می‌توان گرفت؟

تعریف  $A \cup B$  با علائم ریاضی

مجموعه  $A \cup B$  را با علائم ریاضی به صورت زیر تعریف می‌کند:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

و می‌خوانند « $A \cup B$ »، مجموعه‌ای است با عضوهای  $x$  به‌قسمی که  $x$  متعلق به  $A$  یا  $x$  متعلق به  $B$  است.

به عبارت دیگر:

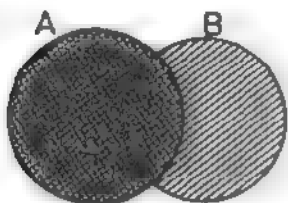
الف - از  $x \in A$  نتیجه می‌شود  $x \in A \cup B$ ، یعنی:

ب - از  $y \in B$  نتیجه می‌شود  $y \in A \cup B$ ، یعنی:

ج - از  $x \in A$  یا  $x \in B$  نتیجه می‌شود  $x \in A \cup B$  و برعکس یعنی:

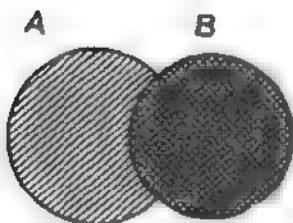
$$x \in A \vee x \in B \iff x \in A \cup B$$

از قسمت الف با توجه به تعریف زیر مجموعه نتیجه می‌شود که برای هر دو مجموعه  $A$  و  $B$ :



$$A \subset A \cup B$$

همچنین از قسمت ب نتیجه می‌شود:



$$B \subset A \cup B$$

یعنی:

هر کدام از مجموعه‌های  $A$  و  $B$ ، زیرمجموعه‌ای از اجتماع  $A$  و  $B$  هستند.

لاکرم مهم - برای هر  $x \in A$ ، نتیجه می‌شود:  $x \in A \cup X$  یعنی:

$$x \in A \rightarrow x \in A \cup X$$

که  $X$  مجموعه دلخواهی است. به عبارت دیگر برای هر مجموعه  $A$  می‌توان نوشت:

$$A \subset A \cup X$$

همچنین در مورد سه مجموعه

$$x \in A \rightarrow x \in (A \cup B)$$

$$x \in A \cup B \rightarrow x \in (A \cup B) \cup C$$

به قضیه زیر توجه کنید:

قضیه - هرگاه  $A$  زیرمجموعه  $B$  باشد، آن‌گاه اجتماع دو مجموعه  $A$  و  $B$  مساوی  $B$  خواهد بود. به عبارت دیگر، برای هر  $A$  و  $B$  از  $A \subset B$  نتیجه می‌شود  $A \cup B = B$  یا به زبان ریاضی:

$$A \subset B \rightarrow A \cup B = B$$

برای بیان درستی مطلب فوق باید نشان دهیم که:

$$B \subset A \cup B \quad (1)$$

$$A \cup B \subset B \quad (2)$$

درستی تساوی (۱) را در صفحه قبل دیده‌ایم. برای

بیان درستی (۲)، طبق تعریف زیرمجموعه، باید نشان دهیم

که هر عضو  $A \cup B$  عضو  $B$  نیز می‌باشد:

$$x \in A \cup B \rightarrow x \in A \vee x \in B$$

$$\rightarrow x \in B \vee x \in B : A \subset B \text{ چون}$$

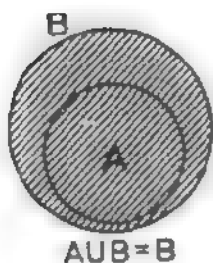
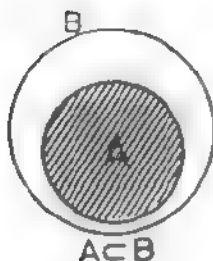
$$\rightarrow x \in B$$

پس

$$A \cup B \subset B \quad (2)$$

از تطبیق (۱) و (۲) نتیجه می‌شود،

$$A \cup B = B$$



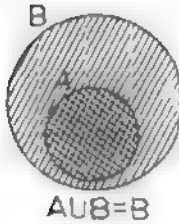


عکس قضیه فوق :

قضیه - هرگاه اجتماع دو مجموعه  $A$  و  $B$  مساوی  $B$  باشد، آن گاه  $A$  زیر مجموعه  $B$  است . به عبارت دیگر، برای هر دو مجموعه  $A$  و  $B$  از  $A \cup B = B$  نتیجه می شود  $A \subset B$  یا به زبان ریاضی :

$$(A \cup B = B) \Rightarrow (A \subset B)$$

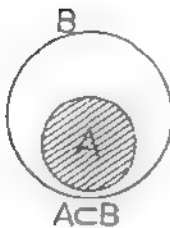
قبلا دیده اید که :



$$A \subset A \cup B \quad (۳)$$

در اینجا نیز داریم  $A \cup B = B$  . پس اگر در (۳) به جای

مجموعه  $A \cup B$  ، مجموعه مساوی آن  $B$  را قرار دهیم نتیجه می شود :



$$A \subset B$$

دو قضیه فوق به صورت زیر قابل بیان هستند :

$$(A \subset B) \iff (A \cup B = B)$$

مثال ۱ - مجموعه های  $A = \{a, e\}$  و  $B = \{a, e, i, o, u\}$  را در نظر بگیرید، آن گاه

نشان دهید که  $A \cup B = B$  .



$$A = \{a, e\} \quad \text{حل :}$$

$$B = \{a, e, i, o, u\}$$

$$\{a, e\} \subset \{a, e, i, o, u\}$$

$$A \cup B = \{a, e\} \cup \{a, e, i, o, u\}$$

$$= \{a, e, i, o, u\}$$

$$= B$$

مثال ۲ - مجموعه  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  ، از مجموعه مرجع  $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

را در نظر بگیرید، آن گاه نشان دهید که :

$$A \cup A = A ; A \cup M = M ; \emptyset \cup A = A ; A \cup A' = M$$

حل :

$$\begin{aligned} A &= \{1, 2, 3, 4\} \\ A \cup A &= \{1, 2, 3, 4\} \cup \{1, 2, 3, 4\} \\ &= \{1, 2, 3, 4\} \\ &= A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M &= \{1, 2, 3, 4, 5\} \\ A \cup M &= \{1, 2, 3, 4\} \cup \{1, 2, 3, 4, 5\} \\ &= \{1, 2, 3, 4, 5\} \\ &= M \end{aligned}$$

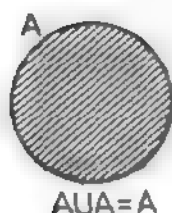
$$\begin{aligned} \emptyset \cup A &= \{ \} \cup \{1, 2, 3, 4\} \\ &= \{1, 2, 3, 4\} \\ &= A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M &= \{1, 2, 3, 4, 5\} \\ A &= \{1, 2, 3, 4\} \\ A' &= \{x, x, x, x, 5\} \\ A' &= \{5\} \\ A \cup A' &= \{1, 2, 3, 4\} \cup \{5\} \\ &= \{1, 2, 3, 4, 5\} \\ &= M \end{aligned}$$

چند نکته مهم

-۱

اجتماع هر مجموعه با خودش مساوی خود مجموعه است. به عبارت دیگر، هرگاه  $A$  مجموعه دلخواهی باشد داریم:  $A \cup A = A$ .

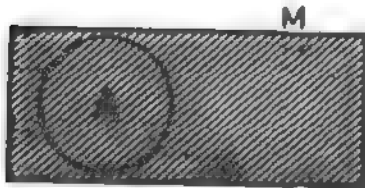


چون  $A \subset A$ ، لذا طبق آنچه گفت شد خواهیم داشت:

$$A \cup A = A$$

-۲

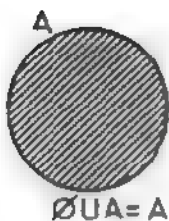
اجتماع هر مجموعه با مجموعه مرجع مساوی  
مجموعه مرجع است. به عبارت دیگر، هرگاه  $A$   
مجموعه دلخواهی باشد داریم:  $A \cup M = M$



چون  $A \subset M$ ، لذا خواهیم داشت:  
 $A \cup M = M$

-۳

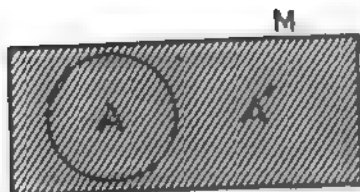
اجتماع مجموعه تهی با هر مجموعه مساوی خود  
آن مجموعه است. به عبارت دیگر، هرگاه  $A$   
مجموعه دلخواهی باشد داریم:  $\emptyset \cup A = A$



چون  $\emptyset \subset A$ ، لذا خواهیم داشت:  
 $\emptyset \cup A = A$

-۲

اجتماع هر مجموعه با مجموعه متمم مساوی  
مجموعه مرجع است. به عبارت دیگر هرگاه  $A$   
مجموعه دلخواهی باشد داریم:  $A \cup A' = M$



برای نشان دادن درستی مطلب فوق گوییم،  
 $\forall x \in M \rightarrow x \in A \vee x \in A'$  (۱)

$\begin{cases} x \in A \rightarrow x \in A \cup A' \\ x \in A' \rightarrow x \in A \cup A' \end{cases}$  (۲)

با مقایسه (۱) و (۲) نتیجه می‌شود:

$$\forall x \in M \rightarrow x \in A \cup A'$$

یعنی،

$$M \subset A \cup A' \quad (۳)$$

از طرفی هر مجموعه زیر مجموعه  $M$  می باشد یعنی،

$$A \cup A' \subset M \quad (۲)$$

از مقایسه (۳) و (۲) نتیجه می شود که

$$A \cup A' = M$$

مثال ۱ - درستی تساوی زیر را نشان دهید :

$$A \cup (A \cap A') = M$$

حل . طرف چپ تساوی را ساده می کنیم تا طرف راست به دست آید .

$$A \cup (A \cap A') = A \cup M \quad \text{چرا؟}$$

$$= M \quad \text{چرا؟}$$

مثال ۲ - درستی تساوی زیر را نشان دهید :

$$(A \cup A) \cap A' = M$$

حل : طرف چپ تساوی را ساده می کنیم تا طرف راست به دست آید :

$$(A \cup A) \cap A' = A \cap A' \quad \text{چرا؟}$$

$$= M \quad \text{چرا؟}$$

تمرین

۱- در تمرینهای زیر به جای ؟ عضو مناسب بگذارید :

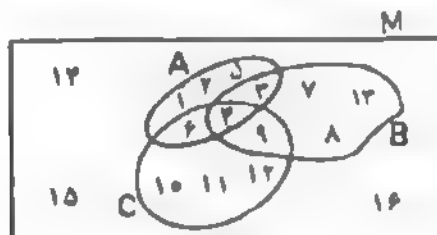
$$\{a, b, c\} \cup \{a, f, f\} = \{a, b, d, c, f\}$$

$$\{f, a, g\} \cup \{a, f, f\} = \{a, b, f, g\}$$

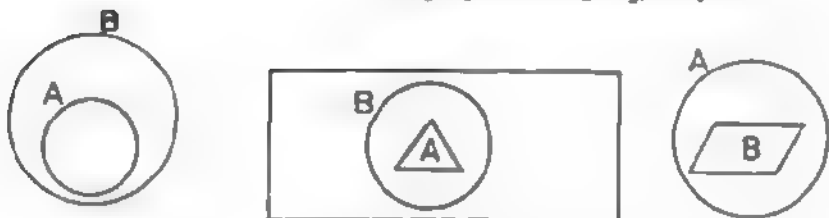
$$\{f, f, i\} \cup \{f, f, o, u\} = \{a, b, i, o, u\}$$

۲ - با استفاده از شکل زیر، مجموعه های :

$A \cup B$  ،  $A \cap B$  ،  $B \cap C$  ،  $(A \cup B) \cap C$  ،  $A \cup (B \cap C)$  را بنویسید .



۲- در شکلهای زیر  $A \cup B$  را هاشور بزنید :



۲- مجموعه‌های طرف دوم تساویهای زیر را با علائم ریاضی بنویسید :

الف -  $\{x \mid x \in \mathbb{N}, 1 < x \leq 10\} \cup \{x \mid x \in \mathbb{N}, 10 \leq x < 100\} = \dots$

ب -  $\{x \mid x \text{ معلم آسیایی است}\} \cup \{x \mid x \text{ معلم ایرانی است}\} = \dots$

ج -  $\{x \mid x \text{ عدد طبیعی زوج است}\} \cup \{x \mid x \in \mathbb{N}\} = \dots$

۵- در تساویهای زیر به جای ؟ مجموعه یا مجموعه‌های مناسب بگذارید :

$$(P')' \cap C \cup ? = M \cap D \cup ? = D \cap M' = ?$$

$$C \cup C' = ? \cap \emptyset' = ?$$

۶- مجموعه‌های  $A = \{1, 2, 3, 6\}$  و  $B = \{2, 3, 5, 7\}$  را در نظر بگیرید ، سپس مجموعه‌های  $A \cup B$  و  $B \cup A$  را بنویسید .

از این تمرین چه نتیجه‌ای را می‌توان حتم زد؟

۷- مجموعه‌های  $A = \{a, b, c, d\}$  و  $B = \{a, e, c\}$  و  $C = \{c, d, e\}$  را در

نظر بگیرید . سپس مجموعه‌های  $(A \cup B) \cup C$  و  $A \cup (B \cup C)$  را بنویسید .

از این تمرین چه نتیجه‌ای را می‌توان حتم زد؟

۸- مجموعه‌های  $A = \{3, 4, 5, 6\}$  و  $B = \{2, 3, 6, 8\}$  از مجموعه مرجع

$M = \{1, 2, \dots, 9\}$  را در نظر بگیرید ، سپس مجموعه‌های زیر را بنویسید :

$$A \cup \emptyset, A \cup M, A \cup A', (A \cup B)', B \cup B'$$

۹- در شکلهای زیر  $(A \cup B)'$  را سایه بزنید :



۱۰- هرگاه  $A$  و  $B$  دو مجموعه جدا از هم و  $M$  مجموعه مرجع باشد ، با استفاده از نمودار

ون وسایه زدن نشان دهید که  $A \cup B' = B'$  .

۱۱- هرگاه  $A$  زیرمجموعه  $B$  باشد، با استفاده از نمودار ون و سایه زدن نشان دهید:

$$A' \cup B = M$$

۱۲- ثابت کنید که هرگاه  $A \cup B = \emptyset$ ، آنگاه  $A = \emptyset$  و  $B = \emptyset$ .

۱۳- هرگاه  $C \cup D = I$ ، دو مجموعه  $C$  و  $D$  نسبت به هم چگونه اند؟

۱۴- آیا از  $a \in E \cup F$  می توان نتیجه گرفت  $a \in E$ ؟ چرا؟

۱۵- از گزاره های زیر کدامها درست است.

الف -

$$(A \cup B) \subset (A \cup B) \cup D$$

ب -

$$D \subset (D \cup C)$$

ج -

$$(A \cup B) \subset A$$

د -

$$(A \cup B)' \subset (A \cup B)$$

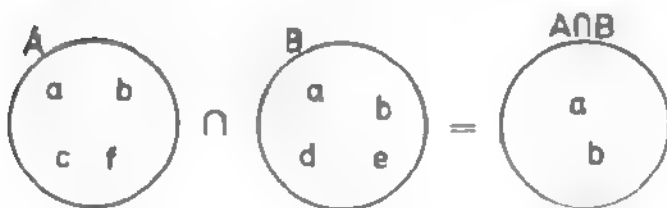
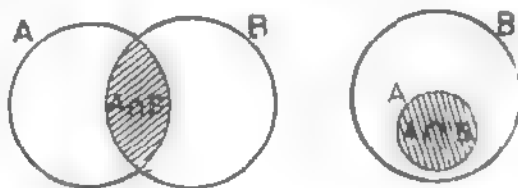
ه -

$$(B \cup C) \subset D \cup (B \cup C)$$

اشتراک دو مجموعه

در دو مجموعه  $A$  و  $B$  را با استفاده از نمودار ون به صورت های زیر

مشاهده کرده اید:



تعریف - اشتراك دو مجموعه  $A$  و  $B$  که با نماد  $A \cap B$  نموده می‌شود، مجموعه‌ای است از همه اعضایی که متعلق به  $A$  و متعلق به  $B$  باشند.

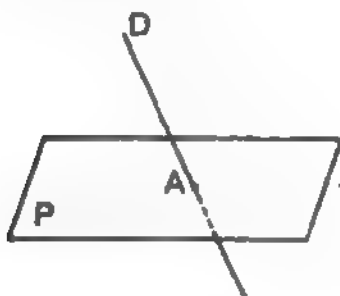
$(A \cap B)$  را می‌خوانیم «اشترك  $A$  و  $B$ »

در هندسه، هرگاه خط و صفحه مجموعه نقاط فرض شوند، اشتراك دو خط، اشتراك خط و صفحه و اشتراك دو صفحه را به ترتیب می‌توان به صورت زیر بیان کرد:



$$D \cap D' = \{A\}$$

( $A$  نقطه است)



$$P \cap D = \{A\}$$

( $A$  نقطه است)

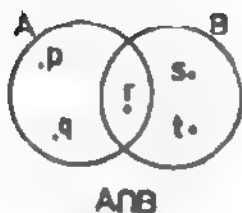


$$P \cap Q = D$$

روشن است که اگر  $A$  و  $B$  دو مجموعه جدا از هم باشند، اشتراك آنها تهی خواهد بود.

$$A \cap B = \emptyset$$

مثال ۱ - دو مجموعه  $A = \{p, q, r\}$  و  $B = \{r, s, t\}$  را در نظر بگیرید، آنگاه مجموعه  $A \cap B$  را بنویسید.



$$A = \{p, q, r\}$$

$$B = \{r, s, t\}$$

$$A \cap B = \{p, q, r\} \cap \{r, s, t\} \\ = \{r\}$$

مثال ۲ - برای دو مجموعه  $A = \{1, 3, 5, \dots\}$  و  $B = \{2, 4, 6, \dots\}$  مجموعه  $A \cap B$  را بنویسید.

حل :

$$A = \{1, 3, 5, \dots\}$$

$$B = \{2, 4, 6, \dots\}$$

$$A \cap B = \{1, 3, 5, \dots\} \cap \{2, 4, 6, \dots\} \\ = \emptyset$$

مثال ۳ - مجموعه  $A = \{a, b, c, d\}$  از مجموعه مرجع  $M = \{a, b, c, d, e\}$  را در نظر بگیرید، آن‌گاه مجموعه‌های زیر را بنویسید :

$$A \cap A, \emptyset \cap A, A \cap A', A \cap M$$

حل :

$$A = \{a, b, c, d\}$$

$$A \cap A = \{a, b, c, d\} \cap \{a, b, c, d\} \\ = \{a, b, c, d\}$$

$$\emptyset \cap A = \{ \} \cap \{a, b, c, d\} \\ = \{ \}$$

$$M = \{a, b, c, d, e\}$$

$$A' = \{a', b', c', d', e\} \\ = \{e\}$$

$$A \cap A' = \{a, b, c, d\} \cap \{e\}$$

$$A \cap A' = \{ \}$$

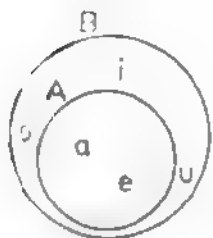
$$A \cap M = \{a, b, c, d\} \cap \{a, b, c, d, e\} \\ = \{a, b, c, d\}$$

از این مثال چه نتایج می‌توان گرفت ؟



مثال ۴ - مجموعه‌های  $A = \{a, e\}$  و  $B = \{a, e, i, o, u\}$  در نظر بگیرید.

مجموعه  $A \cap B$  را بنویسید.



حل:  $A = \{a, e\}$

$B = \{a, e, i, o, u\}$

$\{a, e\} \subset \{a, e, i, o, u\}$

$A \cap B = \{a, e\} \cap \{a, e, i, o, u\}$

$\{a, e\}$

از مثال ۴ چه نتیجه‌ای می‌توان گرفت؟

تعریف  $A \cap B$  با علائم ریاضی

مجموعه  $A \cap B$  را با علائم ریاضی به صورت زیر تعریف می‌کنند:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

و می‌خوانند « $A \cap B$ »، مجموعه‌ای است با عضوهای  $x$

به قسمی که  $x$  متعلق به  $A$  و  $x$  متعلق به  $B$  است.

به عبارت دیگر:

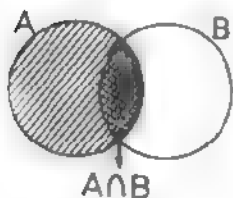
الف - از  $x \in A \cap B$ ، نتیجه می‌شود  $x \in A$

یعنی:  $x \in A \cap B \Rightarrow x \in A$

ب - از  $x \in A \cap B$ ، نتیجه می‌شود  $x \in B$

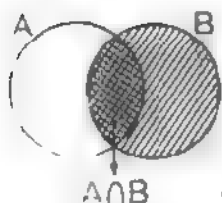
یعنی:  $x \in A \cap B \Rightarrow x \in B$

نوحه به تعریف زیر مجموعه از الف نتیجه می‌شود که برای هر دو مجموعه دلخواه  $A$  و  $B$



$$A \cap B \subset A$$

و ب نیز نتیجه می‌شود:



$$A \cap B \subset B$$

یعنی،  $A \cap B$  زیرمجموعه هر کدام از مجموعه‌های  $A$  و  $B$  است.

به قضیه زیر توجه کنید :

قضیه- هرگاه  $A$  زیرمجموعه  $B$  باشد، آن گاه اشتراك دو مجموعه  $A$  و  $B$  مساوی  $A$  خواهد بود. به عبارت دیگر برای هر دو مجموعه  $A$  و  $B$  از  $A \subset B$  نتیجه می شود که  $A \cap B = A$  یا بزبان ریاضی :

$$(A \subset B) \Rightarrow (A \cap B = A)$$

برای نشان دادن درستی مطلب فوق فرض کنیم

$$x \in A$$

$$A \subset B \iff (x \in A \Rightarrow x \in B) \quad \text{داریم ۱}$$

$$\therefore (x \in A \wedge x \in B) \Rightarrow x \in A \cap B$$

یعنی

$$x \in A \Rightarrow x \in A \cap B$$

پس

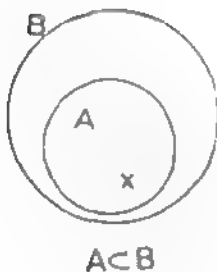
$$A \subset A \cap B \quad (۱)$$

در صفحه قبل نیز دیدید که

$$A \cap B \subset A \quad (۲)$$

از مقایسه (۱) و (۲) نتیجه می شود

$$A \cap B = A$$



عکس قضیه فوق :

قضیه- هرگاه اشتراك دو مجموعه  $A$  و  $B$  مساوی  $A$  باشد، آن گاه  $A$  زیرمجموعه  $B$  است. به عبارت دیگر، برای هر دو مجموعه  $A$  و  $B$  از  $A \cap B = A$  نتیجه می شود که  $A \subset B$  یا بزبان ریاضی :

$$A \cap B = A \Rightarrow A \subset B$$

در صفحات قبل دیدیم که

$$A \cap B \subset B \quad (1)$$

در اینجا نیز بنا بر فرض داریم:  $A \cap B = A$  پس اگر

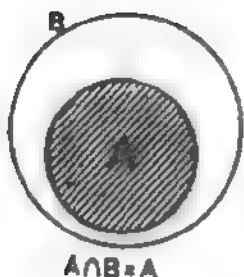
در (۱) به جای مجموعه  $A \cap B$ ، مجموعه مساوی آن  $A$  را

قرار دهیم، نتیجه می شود

$$A \subset B$$

دو قضیه بالا را می توان با زبان ریاضی چنین نوشت:

$$(A \subset B) \iff (A \cap B = A)$$

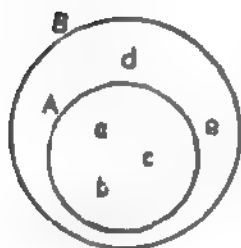


مثال ۱- دو مجموعه  $A = \{a, b, c\}$  و  $B = \{a, b, c, d, e\}$  را در نظر بگیرید،

آن گاه نشان دهید که:

$$A \cap B = A$$

حل:



$$A = \{a, b, c\}$$

$$B = \{a, b, c, d, e\}$$

$$\{a, b, c\} \subset \{a, b, c, d, e\}$$

$$A \cap B = \{a, b, c\} \cap \{a, b, c, d, e\}$$

$$= \{a, b, c\}$$

$$= A$$

مثال ۲- مجموعه  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  از مجموعه مرجع  $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  را

در نظر بگیرید، آن گاه نشان دهید که:

$$A \cap A = A : \emptyset \cap A = \emptyset : A \cap A' = \emptyset : A \cap M = A$$

$$A = \{1, 2, 3, 4\}$$

حل:

$$A \cap A = \{1, 2, 3, 4\} \cap \{1, 2, 3, 4\}$$

$$= \{1, 2, 3, 4\}$$

$$= A$$

$$\emptyset \cap A = \{ \} \cap \{1, 2, 3, 4\}$$

$$= \{ \}$$

$$= \emptyset$$

$$M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$A' = \{x, y, z, 5\}$$

$$A' = \{5\}$$

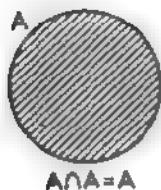
$$A \cap A' = \{1, 2, 3, 4\} \cap \{5\} \\ = \emptyset$$

$$A \cap M = \{1, 2, 3, 4\} \cap \{1, 2, 3, 4, 5\} \\ = \{1, 2, 3, 4\} \\ = A$$

چند نکته مهم

-۱

اشترک هر مجموعه با خودش مساوی خود مجموعه است. به عبارت دیگر، هرگاه  $A$  مجموعه دلخواهی باشد داریم  $A \cap A = A$ .

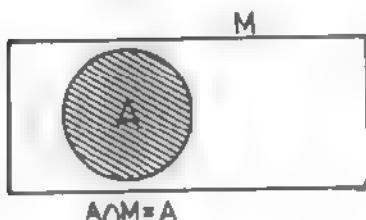


چون  $A \subset A$ ، لذا طبق آنچه دیده‌اید خواهیم داشت :

$$A \cap A = A$$

-۲

اشترک هر مجموعه با مجموعه مرجع، مساوی خود آن مجموعه است. به عبارت دیگر، هرگاه  $A$  مجموعه دلخواهی باشد داریم  $A \cap M = A$ .



چون  $A \subset M$ ، لذا داریم :

$$A \cap M = A$$

-۳

اشتراک مجموعه نهی با هر مجموعه، مساوی مجموعه نهی است. به عبارت دیگر، هرگاه  $A$  مجموعه دلخواهی باشد داریم  $\emptyset \cap A = \emptyset$ .

چون  $\emptyset \subset A$ ، لذا  $\emptyset \cap A = \emptyset$  خواهد شد.

-۴

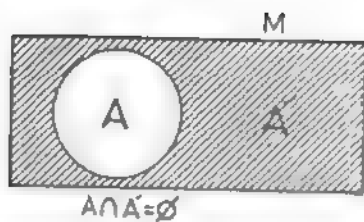
اشتراک هر مجموعه با مجموعه متمم، مساوی مجموعه نهی است. به عبارت دیگر، هرگاه  $A$  مجموعه دلخواهی باشد داریم  $A \cap A' = \emptyset$ .

روشن است که  $A$  و  $A'$  هیچ عضو مشترکی ندارند. به عبارت دیگر،  $A$  و  $A'$  دو مجموعه جدا از هم می باشند. پس:

$$A \cap A' = \emptyset$$

هرگاه  $A \cap B = \emptyset$ ، آنگاه  $B$  متمم

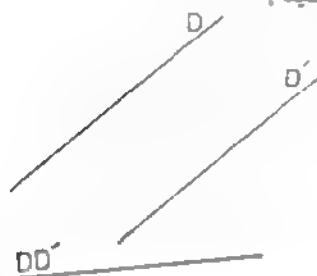
$A$  است؟



مثال ۱ - هرگاه خط و صفحه مجموعه نقاط و دو خط  $D$  و  $D'$  در صفحه فرض شوند،

استفاده از مجموعه ها، شرط توازی برای  $D$  و  $D'$  را بنویسید.

حل:



دو خط  $D$  و  $D'$  موازیند هرگاه

$$D \cap D' = \emptyset \text{ یا } D \cap D' = D = D'$$

در صورتی که این دو خط متمم باشند  $D \cap D' = \emptyset$  بری بیان واری تمکابی می باشد

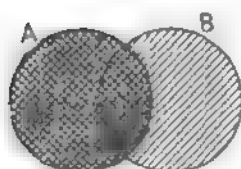
مثال ۲- هرگاه  $A$  و  $B$  دو مجموعه دلخواه باشند، نشان دهید که :

$$A \cap (A \cup B) = A \quad \text{الف -}$$

$$(A \cap B) \cup A = A \quad \text{ب -}$$

حل : دیدید که «  $A \subseteq B$  » از آنجا می شود  $A \cap B = A$  و  $A \cup B = B$  تا توجه به این مطالب اکنون درستی الف و ب را نشان می دهیم :

الف - دیدید که



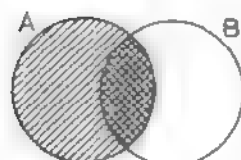
$$A \subseteq A \cup B$$

$$A \subseteq A \cup B$$

پس طبق مقدمه نتیجه می شود

$$A \cap (A \cup B) = A$$

ب - باز می دیدید که



$$A \cap B \subseteq A$$

$$A \cap B \subseteq A$$

پس طبق مقدمه نتیجه می شود

$$(A \cap B) \cup A = A$$

مثال ۳ - درستی تساوی زیر را نشان دهید :

$$A \cap (A \cup A') = A$$

حل : طرف چپ تساوی را ساده می کنیم تا طرف راست به دست آید :

$$A \cap (A \cup A') = A \cap M$$

$$= A$$

چرا ؟

چرا ؟

تذکر ۱ - دو مجموعه  $A$  و  $A'$  دارای سه خاصیت زیر می باشند :

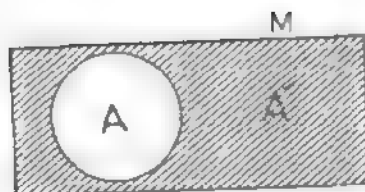
الف - در حالت کلی  $A$  و  $A'$  تهی نیستند .

ب -  $A$  و  $A'$  دو مجموعه جدا از هم می باشند .

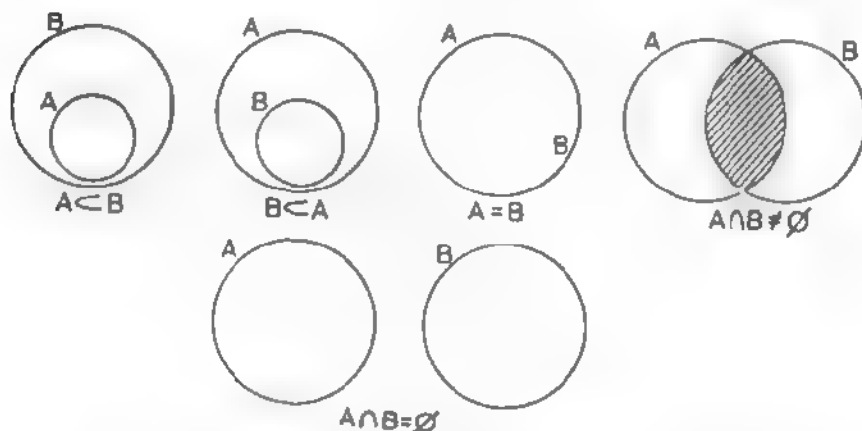
$$A \cap A' = \emptyset$$

ج - ازا اجتماع  $A$  و  $A'$  مجموعه  $M$  به دست می آید :

$$A \cup A' = M$$



تذکره ۳ - هرگاه وضع دو مجموعه A و B نسبت به هم از اول روشن باشد، برای نمایش هندسی آنها از یکی از شکلهای زیر استفاده می کنیم :



اماگاهی اوقات ممکن است در شروع حل مسئله ای وضع دو مجموعه نسبت به هم روشن نباشد. در این صورت می توان آنها را به صورت زیر نمایش داد :



و بعد از حل مسئله موقعی که معلوم شد این دو مجموعه نسبت به هم چه وضعی دارند. از نگاه شکل را به یکی از صورتهای فوق تصحیح کرد

تذکره ۴ - در حساب و جبر دیده اید که برای سه عدد a و b و c از تساویهای :

$$a + b = a + c$$

$$a \times b = a \times c, a \neq 0$$

نتیجه می شود که

$$b = c$$

حال ببینیم این مطلب در مجموعه ها و در مورد اعمال  $\cap$  و  $\cup$  چگونه است .

مثال ۴ - مجموعه  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ،  $B = \{1, 2, 6, 7\}$  و  $C = \{3, 5, 6, 7\}$

را در نظر گرفته نشان دهید که در مورد این سه مجموعه

$$A \cup B = A \cup C$$

حل : مجموعه‌های طرفین این تساوی را حساب می‌کنیم :

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\} \cup \{1, 2, 6, 7\}$$

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

$$A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5\} \cup \{3, 5, 6, 7\}$$

$$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

دیده می‌شود که دو مجموعه  $A \cup B$  و  $A \cup C$  مساویند :

$$A \cup B = A \cup C$$

در حالی که دو مجموعه

$$B = \{1, 2, 6, 7\}$$

$$C = \{3, 5, 6, 7\}$$

مساوی نیستند :

$$B \neq C$$

در ریاضیات وقتی یک دستور حتی برای یک مثال درست نباشد از این دستور نمی‌توان استفاده نمود . پس در حالت کلی از تساوی

$$A \cup B = A \cup C$$

نتیجه نمی‌شود که

$$B = C$$

این مطلب در مورد اشتراك دو مجموعه نیز صادق است یعنی از تساوی :

$$A \cap B = A \cap C$$

نتیجه نمی‌شود که

$$B = C$$

دو مجموعه‌ها از طرفین یک تساوی که شامل اعمال  $\cup$  و  $\cap$  باشد ، دو مجموعه‌های مساوی را نمی‌توان حذف کرد .

اما عکس مطلب درست است . یعنی از تساوی

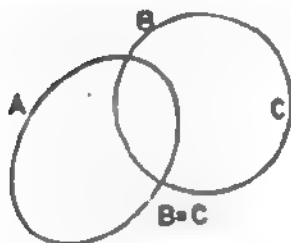
$$B = C$$

نتیجه می‌شود که

$$A \cup B = A \cup C$$

$$A \cap B = A \cap C$$

زیرا ،  $B$  و  $C$  در حقیقت یک مجموعه هستند نه دو مجموعه متفاوت .





تمرین

۱ - در تمرینهای زیر به جای ؟ عضو مناسب بگذارید :

$$\{a, b\} \cap \{a, c\} = \{1\} \quad \text{الف -}$$

$$\{a, 1, b, c\} \cap \{d, e, 1, f\} = \{b, d\} \quad \text{ب -}$$

۲ - سه مجموعه  $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x < 20\}$  ،  $B = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x < 12\}$  و

$C = \{x \mid x \in \mathbb{N}\}$  را در نظر بگیرید ، آن گاه مجموعه‌های زیر را با علائم

ریاضی بنویسید :

$$A \cap B, A \cap C, B \cap C$$

۳ - هر گاه خط و صفحه مجموعه نقاط فرض شوند ، با استفاده از مجموعه‌ها ، گروه‌های زیر

را بیان کنید :

الف - خط  $D$  و صفحه  $P$  موازیند .

ب - خط  $D$  و صفحه  $P$  متقاطعند .

ج - خط  $D$  داخل صفحه  $P$  واقع است .

۴ - هر گاه خط و صفحه مجموعه نقاط فرض شوند ، با استفاده از مجموعه‌ها ، گزاره‌های زیر

را بیان کنید :

الف - دو صفحه  $P$  و  $P'$  متوازی هستند .

ب - دو صفحه  $P$  و  $P'$  دارای فصل مشترک  $D$  هستند .

ج - دو صفحه  $P$  و  $P'$  برهم منطبق هستند .

۵ - هرگاه  $P, \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$  و  $R$  به ترتیب بدانش مجموعه‌های اعداد اول ، اعداد صحیح ،

اعداد درست ، اعداد گویا و اعداد حقیقی باشد ، کدامیک از گزاره‌های زیر درست است :

$$-2 \in \mathbb{N} ; \pi \in \mathbb{R} ; P \subset \mathbb{N} ; \sqrt{(-2)^2} \in \mathbb{N} ; P \subset \mathbb{Z} ;$$

$$Z \cap R = Z ; O \cup R = R ; \mathbb{N} \cap \mathbb{Z} = \mathbb{N} ; P \cap \mathbb{N} = \mathbb{N}$$

۶ - مجموعه‌های  $A = \{p, q, r\}$  و  $B = \{p, r, 1\}$  را در نظر گرفته سپس مجموعه‌های :

$A \cap B$  و  $B \cap A$  را بنویسید .

از این تمرین چه نتیجه‌ای را می‌توان حدس زد ؟

۷ - با استفاده از مجموعه‌های  $\{a, b, c\}$  و  $\{b, d, e\}$  و  $B = \{b, c, e\}$  و  $C =$

مجموعه‌های زیر را بنویسید :  $A \cap (B \cap C) , (A \cap B) \cap C$

از این تمرین چه نتیجه‌ای می‌توان گرفت ؟

۸ - مجموعه‌های  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  و  $B = \{3, 4, 5\}$  و  $C = \{2, 3, 7\}$  را

در نظر بگیرید ، سپس مجموعه‌های زیر را بسویید و در هر حالت نتیجه‌ها را با هم مقایسه کنید .

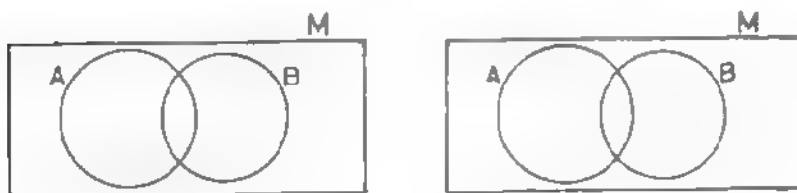
الف -  $(A \cap B) \cup (A \cap C)$  و  $A \cap (B \cup C)$

ب -  $(A \cup B) \cap (A \cup C)$  و  $A \cup (B \cap C)$

۹- در شکلی زیر ، مجموعه‌های  $(A' \cap B)$  و  $(A \cup B)'$  را جداگانه سایه رده . با مقایسه آنها با یکدیگر نتیجه حاصل را بیان کنید :



۱۰- در شکلی زیر ، مجموعه‌های  $(A' \cup B')$  و  $(A \cap B)'$  را جداگانه سایه رده . با مقایسه آنها با یکدیگر نتیجه حاصل را بیان کنید :



۱۱- با استفاده از مجموعه‌های  $A = \{a, b, c\}$  و  $B = \{c, d, e\}$  ، نشان دهید که :  $M = \{a, b, c, d, e, f\}$

$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$

$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$

۱۲- با استفاده از نمودار ون و سایه ردن نشان دهید که هرگاه  $A \subset B$  ، آنگاه

$$A \cap B' = \emptyset$$

۱۳- هرگاه  $A$  و  $B$  دو مجموعه جدا از هم باشند با استفاده از نمودار ون و سایه ردن نشان دهید که :

$$A \cap B' = A$$

۱۴- در گزاره‌های زیر به جای ؟ مجموعه یا مجموعه‌های مناسب بگذارید :

$$C \cap ? \subset D ; F \cap M = ? ; E \cap E = ? ; F \cap ? = F ; D \cap ? = \emptyset$$

۱۵- آیا هر دو مجموعه  $A$  و  $B$  می‌توان نوشت  $A \cap B \subset A \cup B$  ؟

۱۶- هرگاه  $A \cap B = M$  ، ثابت کنید که  $A = M$  و  $B = M$  (مرجع است).

۱۷ - ثابت کنید که برای هر سه مجموعه دلخواه  $A$ ،  $B$  و  $C$ ، از

$$A \subseteq B$$

نتیجه می‌شود

$$A \cup C \subseteq B \cup C$$

$$A \cap C \subseteq B \cap C$$

و

۱۸ - ثابت کنید که برای هر سه مجموعه دلخواه  $A$ ،  $B$  و  $C$ ، از

$$A \subseteq C$$

$$B \subseteq C$$

و

نتیجه می‌شود

$$A \cup B \subseteq C$$

$$A \cap B \subseteq C$$

و

۱۹ - ثابت کنید که برای هر سه مجموعه دلخواه  $A$ ،  $B$  و  $C$ ، از

$$A \subseteq C$$

$$A \subseteq B$$

و

نتیجه می‌شود

$$A \subseteq B \cup C$$

$$A \subseteq B \cap C$$

و

۲۰ - ثابت کنید که برای هر چهار مجموعه دلخواه  $A$ ،  $B$ ،  $C$  و  $D$ ، از

$$A = B$$

$$C = D$$

و

نتیجه می‌شود

$$A \cup C = B \cup D$$

$$A \cap C = B \cap D$$

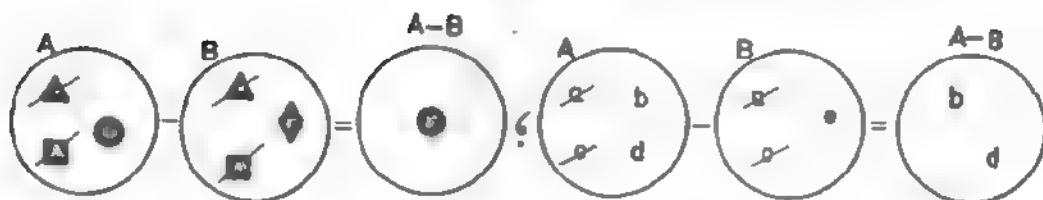
و

### تفاضل دو مجموعه

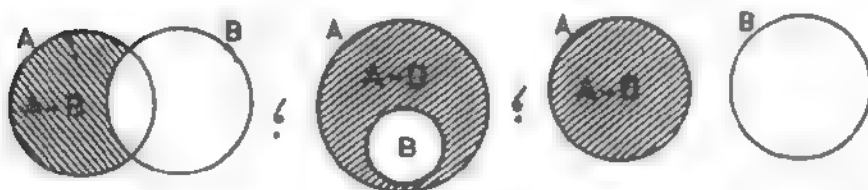
اگر دو مجموعه  $A$  و  $B$  داده شده باشند، مجموعه عضوهایی از  $A$  که در  $B$  نباشند، مجموعه تفاضل  $A - B$  را تشکیل می‌دهند.

تعریف - تفاضل دو مجموعه  $A$  و  $B$  که با نماد  $A - B$  نموده می‌شود، مجموعه همانان عضوایی از  $A$  است که در  $B$  نباشد.

در شکلهای زیر تفاضل  $A - B$  نشان داده شده است :



همچنین در شکلهای زیر تفاضل  $A - B$  هاشور مشخص شده است :



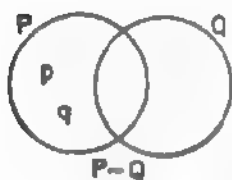
بهعین ترتیب ، مجموعه  $B - A$  ، مجموعه همه آن عضوهای از  $B$  است که در  $A$  نباشند .

اگر  $B \subset A$  در این صورت  $A - B$  ، متمم مجموعه  $B$  نسبت به  $A$  خوانده می شود .

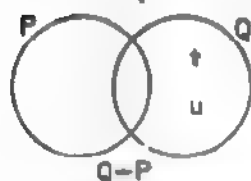
طبق آنچه گفته شد ، آیا می توان نوشت :  $A^c = M - A$  ؟

مثال ۱ - در مجموعه  $P = \{p, q, r, s\}$  و  $Q = \{r, s, t, u\}$  را در نظر بگیرید ،

آنگاه مجموعه های  $P - Q$  و  $Q - P$  را بنویسید .



$P - Q$



$Q - P$

$$P = \{p, q, r, s\}$$

$$Q = \{r, s, t, u\}$$

$$P - Q = \{p, q, \cancel{r}, \cancel{s}\}$$

$$= \{p, q\}$$

$$Q - P = \{\cancel{r}, \cancel{s}, t, u\}$$

$$= \{t, u\}$$

حل :

آیا  $P - Q$  زیرمجموعه  $P$  است ؟  $Q - P$  زیرمجموعه چه مجموعه ای است ؟

مثال ۲ - مجموعه های  $P = \{۲, ۴, ۸, ۱۶\}$  و  $Q = \{۲, ۴, ۶, ۸, ۱۰, ۱۲\}$  را در

نظر بگیرید ، آنگاه مجموعه های  $P - Q$  و  $Q - P$  را بنویسید .



حل :

$$P = \{2, 8, 12\}$$

$$Q = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$$

$$P - Q = \{\cancel{2}, \cancel{8}, \cancel{12}\}$$

$$= \emptyset$$

$$Q - P = \{2, \cancel{8}, 6, \cancel{12}, 10, \cancel{4}\}$$

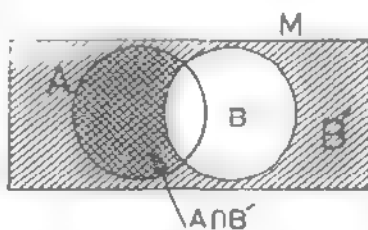
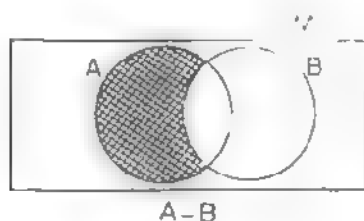
$$= \{2, 6, 10\}$$

از این مثال چه نتیجه گرفت ؟

مثال ۳ - هرگاه A و B دو مجموعه دخواه و M مجموعه مرجع باشد ، با استفاده از نمودار

ون و سایه زدن دو مجموعه  $A - B$  و  $A \cap B'$  را نمایش دهد

حل :



از مثال ۳ چه نتیجه‌ای را می‌توان حلس زد ؟

تعریف تفاضل دو مجموعه با استفاده از زبان ریاضی

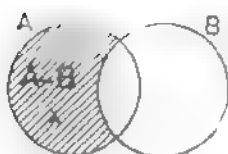
مجموعه  $A - B$  را با استفاده از زبان رمایی به صورت زیر تعریف می‌کنند .

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ و } x \notin B\}$$

می‌خوانند  $A - B$  ، مجموعه‌ای است با عضوهای x به قسمی که x متعلق به A است و x

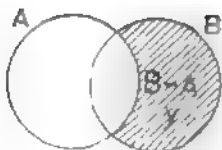
متعلق به B نیست .

روشن است که از  $x \in A - B$  نتیجه می‌شود  $x \in A$  ، یعنی :



$$A - B \subset A$$

و این از روی شکل نیز دیده می‌شود .



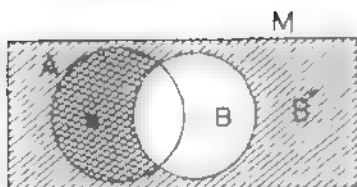
همچنین :

$$B - A \subset B$$

به مطلق زیر توجه کند

هرگاه A و B دو مجموعه دلخواه باشند، مجموعه  $A - B$  مساوی است با اشتراك دو مجموعه A و  $B'$  به عبارت دیگر:  $A - B = A \cap B'$

دیدید که :



$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ و } x \notin B\}$$

یعنی  $A - B$ ، مجموعه‌ای است با عضوهای  $x$  به قسمی که  $x$  متعلق به A است و  $x$  متعلق به B نیست. اما اگر  $x$  متعلق به B باشد ( $x \in B$ )،

آن‌گاه نامرئریف مجموعه متمم،  $x$  متعلق به  $B'$  خواهد بود ( $x \in B'$ ) به عبارت دیگر :

$$A - B = \{x' \mid x \in A \text{ و } x \in B'\}$$

و این درست تعریف اشتراك دو مجموعه A و  $B'$  است یعنی :

$$A - B = A \cap B'$$

مثال ۱ - هرگاه A مجموعه دلخواهی باشد، نشان دهید که :

$$A - \emptyset = A \quad \text{الف} \quad A - A = \emptyset \quad \text{ب}$$

حل . طبق آنچه در فوق گفته شد، می‌توان نوشت

$$A - A = A \cap A'$$

$$= \emptyset$$

چرا ؟

$$A - \emptyset = A \cap \emptyset'$$

$$= A \cap M$$

چرا ؟

$$= A$$

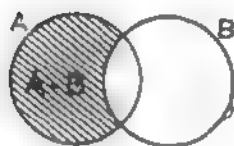
چرا ؟

نتایج فوق را مستقیماً از روی تعریف تفاضل دو مجموعه بیان کنید

مثال ۲ - هرگاه A مجموعه دلخواهی باشد، نشان دهید که :

$$M - A = A' \quad \text{الف} \quad \emptyset - A = \emptyset \quad \text{ب}$$

حل : الف - بنا بر تعریف تفاضل دو مجموعه ،  $A - B$  ، مجموعه ای است که عضوهای آن در  $B$  نبوده و در  $A$  باشند و چون در  $B$  عضو وجود ندارد پس  $A - B = \emptyset$  .  
 ب - باز سار تعریف تفاضل دو مجموعه ،  $M - A$  ، مجموعه ای است که عضوهای آن در  $M$  بوده و در  $A$  نباشد و این همان تعریف  $A'$  است<sup>۱</sup> . پس  $M - A = A'$



مثال ۳ - دوستی تساوی زیر را نشان دهید :

$$(A - B) \cup A = A$$

حل : دید بده که

$$A - B \subset A$$

بنابراین نیز گفتیم از  $X \subset A$  نتیجه می شود  $X \cup A = A$  . پس

$$(A - B) \cup A = A$$

مثال ۴ - نشان دهید که  $A - A' = A$  .

$$A - A' = A \cap (A')' \quad \text{چرا ؟}$$

$$= A \cap A \quad \text{چرا ؟}$$

$$= A \quad \text{چرا ؟}$$

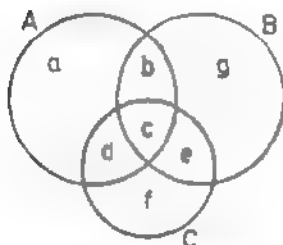
تمرین

۱- در تمرینهای زیر به جای ؟ عضو مناسب بگذارید :

$$\{a, b\} - \{a, c\} = \{?\}$$

$$\{a, ?, b, c\} - \{a, d, ?\} = \{b\}$$

$$\{a, e, i\} - \{?, a\} = \{i\}$$



۲ - با استفاده از این شکل ، مجموعه های

$$C - A, B - A, B - C, A - C, A - B$$

$C - B$  را بنویسید .

۱- بعضی از کتب مجموعه معمم را بصورت  $A' = M - A$  ، تعریف کرده اند .

۳- برای دو مجموعه  $A = \{1, 2, 3\}$  و  $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ، مجموعه  $A - B$  را نوشته نتیجه حاصل را بیان کنید.

۴- مجموعه‌های  $A = \{a, b, c, d\}$ ،  $B = \{a, b, e, f\}$  و  $C = \{a, e, g\}$  را در نظر گرفته، سپس درستی تساویهای زیر را نشان دهید:

الف-  $A - (A \cap B) = A - B$

ب-  $(A - B) \cup (A \cap B) = A$

ج-  $[(A - B) \cup (B - A)] \cup (A \cap B) = A \cup B$

۵- دو مجموعه  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  و  $B = \{1, 2, 4, 6, 7\}$  از مجموعه  $M = \{1, 2, 3, \dots, 9\}$  را در نظر گرفته، سپس درستی تساویهای زیر را نشان دهید:

الف-  $A - B = B' - A'$       ب-  $A - B = A \cap B'$

ج-  $(A - B) \cap B = \emptyset$       د-  $(A - B) \cap (B - A) = \emptyset$

۶- درستی تساویهای زیر را برای ۴ و ۵ را با استفاده از نمودار ون و سایه‌زدن نشان دهید.

۷- هرگاه  $A$  و  $B$  دو مجموعه و  $A \subset B$  باشد، ثابت کنید که

$$A - B = \emptyset$$

۸- ثابت کنید:

الف-  $(B - A) \cup B = B$       ب-  $(A - B') \cup A = A$

ج-  $(A \cup A') \cap (A \cap B') = A - B$

د-  $(A \cap A') \cup (A - B') = A \cap B$

ه-  $A \cap [(B \cap A') \cup B] = A \cap B$



## مطالبی بیشتر در بارهٔ مجموعه‌ها

### خاصیت جابجایی

در دورهٔ راهنمایی دیدید که اگر  $a$  و  $b$  دو عدد دلخواه باشند داریم:

$$a + b = b + a$$

$$a \times b = b \times a$$

این خاصیت به نام خاصیت جابجایی جمع و ضرب در مجموعهٔ اعداد خوانده می‌شود در زیر خاصیت جابجایی اجتماع و اشتراك در مجموعه‌ها را می‌بینید.

تعریف اجتماع و اشتراك دو مجموعه مستقیماً نتیجه می‌شود که برای هر دو مجموعه

$A$  و  $B$  داریم:

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

برای هر دو مجموعه  $A$  و  $B$ ، اجتماع  $A$  با  $B$  مساوی است با اجتماع  $B$  با  $A$  همچنین اشتراك  $A$  با  $B$  مساوی است با اشتراك  $B$  با  $A$ .

مثال - دو مجموعه  $A = \{۲, ۴, ۶\}$  و  $B = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$  را در نظر گرفته نشان

دهید که:

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

حل: مجموعه‌های طرفین این تساویها را می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{۲, ۴, ۶\} \cup \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\} \\ &= \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B \cup A &= \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\} \cup \{۲, ۴, ۶\} \\ &= \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶\} \end{aligned}$$

دیده می شود که این دو مجموعه مساوی هستند. همچنین در دیر تساوی  $A \cap B$  و  $B \cap A$  نشان داده شده است:

$$A \cap B = \{۲، ۴، ۶\} \cap \{۱، ۲، ۳، ۴، ۵\}$$

$$A \cap B = \{۲، ۴\}$$

$$B \cap A = \{۱، ۲، ۳، ۴، ۵\} \cap \{۲، ۴، ۶\}$$

$$= \{۲، ۴\}$$

تذکره - با استفاده از خاصیت جابجایی  $\cup$  و  $\cap$ ، می توان قوانین مجموعه ها را که تاکنون خوانده اید به صورت های زیر نوشت:

$$A \cup M = M \cup A = M$$

$$A \cup \emptyset = \emptyset \cup A = A$$

$$A \cap M = M \cap A = A$$

$$A \cap \emptyset = \emptyset \cap A = \emptyset$$

$$A \cup A' = A' \cup A = M$$

$$(A \cap B) \cup A = A \cup (A \cap B) = A$$

$$(A \cup B) \cap A = A \cap (A \cup B) = A$$

### خاصیت شرکت پذیری (انجمنی)

در دوره راهسایی دیدیم که هرگاه  $u$  و  $b$  و  $c$  سه عدد دلخواه باشند داریم:

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

$$a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$$

این خاصیت به نام خاصیت شرکت پذیری جمع و ضرب در مجموعه اعداد خوانده می شود.

در زیر نیز خاصیت شرکت پذیری اجتماع و اشتراك را در مجموعه ها می بینید:

برای هر سه مجموعه دلخواه  $A$  و  $B$  و  $C$  داریم:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$$

قبل از آنکه رابطه های فوق را به روش ریاضی اثبات کنیم درستی آنها را به وسیله یك مثال و

همچنین با استفاده از نمودار ون تحقیق می کنیم.

تحقیق درستی خاصیت شرکت پذیری با استفاده از یک مثال

مثال - مجموعه‌های  $A = \{a, b, c\}$  و  $B = \{a, d, e\}$  و  $C = \{a, b, c, e, f\}$  را در

مظر گرفته نشان دهید که :

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C \quad (1)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C \quad (2)$$

حل : مجموعه‌های طرفین این تساویها را حساب می‌کنیم :

$$A \cup B = \{a, b, c\} \cup \{a, d, e\}$$

$$= \{a, b, c, d, e\}$$

$$B \cap C = \{a, d, e\} \cap \{a, b, c, e, f\}$$

$$= \{a, b, d, e, f\}$$

$$A \cap B = \{a, b, c\} \cap \{a, d, e\}$$

$$= \{a\}$$

$$B \cup C = \{a, d, e\} \cup \{a, b, c, e, f\}$$

$$= \{a, e\}$$

$$(1) \quad A \cup (B \cap C) = \text{مجموعه طرف چپ تساوی}$$

$$= \{a, b, c\} \cup \{a, b, d, e, f\}$$

$$= \{a, b, c, d, e, f\}$$

$$(2) \quad (A \cup B) \cap C = \text{مجموعه طرف راست تساوی}$$

$$= \{a, b, c, d, e\} \cap \{a, b, c, e, f\}$$

$$= \{a, b, c, d, e, f\}$$

دیده می‌شود که این دو مجموعه مساوی هستند. همچنین در زیر تساوی دو مجموعه

$A \cap (B \cup C)$  و  $(A \cap B) \cup C$  نشان داده شده است :

$$(2) \quad A \cap (B \cup C) = \text{مجموعه طرف چپ تساوی}$$

$$= \{a, b, c\} \cap \{a, e\}$$

$$= \{a\}$$

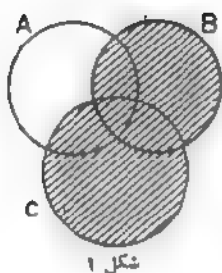
$$(2) \quad (A \cap B) \cup C = \text{مجموعه طرف راست تساوی}$$

$$= \{a\} \cup \{a, b, c, e, f\}$$

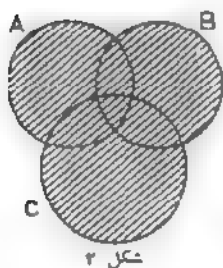
$$= \{a\}$$

تحقیق درستی خاصیت شرکت پذیری با استفاده از نمودار ون  
 ابتدا درستی تساوی زیر را تحقیق می‌کنیم  

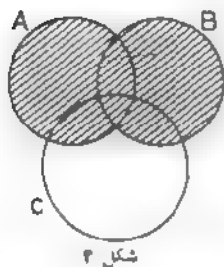
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$$



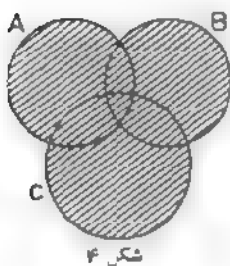
در شکل ۱، مجموعه  $B \cap C$  با سایه مشخص شده است.



در شکل ۲، مجموعه  $A \cup (B \cap C)$  با سایه نشان داده شده است



در شکل ۳، مجموعه  $A \cup B$  با سایه نمایش داده شده است.



در شکل ۴، مجموعه  $(A \cup B) \cap C$  با سایه مشخص شده است

شکل‌های ۲ و ۴ یک ناحیه را مشخص ساخته‌اند، یعنی مجموعه‌های  $A \cup (B \cap C)$  و

$(A \cup B) \cap C$  مساویند:  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$

تمرین - با همین روش درستی تساوی  $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$  را تحقیق کنید.

## اثبات درستی خاصیت شرکت پذیری

درستی خاصیت شرکت پذیری اجتماع و شرکت در مجموعه‌ها شامل و نمودار نشان داده . اکنون درستی

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$$

را ثابت می‌کنیم .

اولاً

$$x \in A \cup (B \cap C) \Rightarrow x \in A \vee x \in B \cap C$$

که در این صورت یکی از دو حالت زیر پیش می‌آید :

الف -

$$x \in A \Rightarrow x \in A \cup B$$

ولی

$$x \in A \cup B \Rightarrow x \in (A \cup B) \cap C \quad (1)$$

ب -

$$x \in B \cap C \Rightarrow x \in B \vee x \in C$$

بدین ترتیب

$$x \in B \Rightarrow x \in A \cup B$$

$$x \in A \cup B \Rightarrow x \in (A \cup B) \cap C \quad (2)$$

$$x \in C \Rightarrow x \in (A \cup B) \cap C \quad (3)$$

ل

با توجه به (1) و (2) و (3) دیده می‌شود که در هر حالت داریم :

$$x \in A \cup (B \cap C) \Rightarrow x \in (A \cup B) \cap C$$

$$A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap C \quad (4) \quad \text{پس}$$

ثانیاً

$$x \in (A \cup B) \cap C \Rightarrow x \in C \vee x \in A \cup B$$

که در این صورت باز هم یکی از دو حالت زیر پیش می‌آید :

ج -

$$x \in C \Rightarrow x \in B \cap C$$

$$x \in C \Rightarrow x \in A \cup (B \cap C) \quad (5)$$

د -

$$x \in A \cup B \Rightarrow x \in A \vee x \in B$$

$$x \in A \Rightarrow x \in A \cup (B \cap C) \quad (6) \quad \text{و در نتیجه}$$

$$x \in B \Rightarrow x \in (B \cup C)$$

$$x \in (B \cup C) \Rightarrow x \in A \cup (B \cup C) \quad (7)$$

با توجه به (۵)، (۶) و (۷) دیده می‌شود که در هر صورت داریم:

$$x \in (A \cup B) \cup C \Rightarrow x \in A \cup (B \cup C)$$

یعنی:

$$(A \cup B) \cup C \subset A \cup (B \cup C) \quad (8)$$

از مقایسه (۴) و (۸) نتیجه می‌شود:

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

تقرین - ما استفاده از این روش ثابت کنید که:

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

تذکر - ما استفاده از آنچه در بالا گفته شد می‌نویسیم:

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C = A \cup B \cup C$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = A \cap B \cap C$$

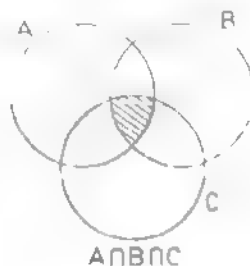
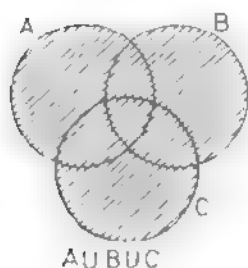
یعنی مجموعه  $(A \cup B) \cup C$  را با  $A \cup B \cup C$  و همچنین مجموعه

$A \cap (B \cap C)$  را با  $A \cap B \cap C$  نشان می‌دهیم. - همین ترتیب می‌نویسیم:

$$A \cup [B \cup (C \cap D)] = (A \cup B) \cup (C \cap D) = A \cup B \cup C \cap D$$

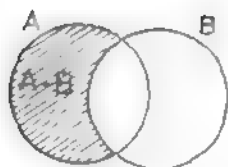
$$A \cap [B \cap (C \cap D)] = (A \cap B) \cap (C \cap D) = A \cap B \cap C \cap D$$

در شکل‌های زیر اجتماع و اشتراك سه مجموعه با سایه مشخص شده است:



مثال ۱- نشان دهید:

$$(A - B) \cap B = \emptyset \quad (1)$$



حل: دیدید که  $A - B = A \cap B'$  و توجه‌این

مطلب ، طرف اول تساوی (۱) را می نویسیم :

$$(A - B) \cap B = (A \cap B') \cap B$$

$$= A \cap (B' \cap B) \quad \text{شرکت پذیری :}$$

$$= A \cap \emptyset \quad \text{چرا ؟}$$

$$= \emptyset \quad \text{چرا ؟}$$

از روی شکل بر دیده می شود که دو مجموعه  $B - A$  و  $A$  ، جدا از هم بوده . لذا اشتراك آنها مساوی مجموعه تهی است .

مثال ۲- نشان دهید :

$$(A - B) \cap (A \cap B) = \emptyset$$

حل : با توجه به «  $A - B = A \cap B'$  » می نویسیم :

$$(A - B) \cap (A \cap B) = (A \cap B') \cap (A \cap B)$$

$$= (A \cap B') \cap (B \cap A) \quad \text{تعويض پذیری :}$$

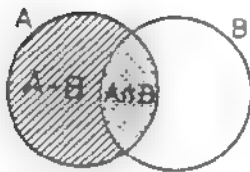
$$= [(A \cap B') \cap B] \cap A \quad \text{شرکت پذیری :}$$

$$= [A \cap (B' \cap B)] \cap A \quad \text{شرکت پذیری :}$$

$$= [A \cap \emptyset] \cap A \quad \text{چرا ؟}$$

$$= \emptyset \cap A \quad \text{چرا ؟}$$

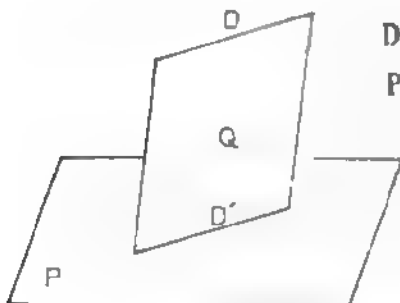
$$= \emptyset$$



از روی شکل نیز دیده می شود که دو مجموعه  $A - B$  و  $A \cap B$  ، جدا از هم بوده در نتیجه اشتراك آنها مساوی مجموعه تهی است .

مثال ۳ - خط  $D$  موازی صفحه  $P$  است . هرگاه صفحه  $Q$  از خط  $D$  بگذرد و  $P$  را در خط

$D'$  قطع کند ، نشان دهید که دو خط  $D$  و  $D'$  متوازی هستند . ( خط و صفحه مجموعه نقاط فرض شده اند ) .



$$D \cap P = \emptyset \quad (۱) \quad \text{D موازی P است .}$$

$$P \cap Q = D' \quad (۲) \quad \text{D' فصل مشترك دو صفحه است .}$$

$$D \parallel D' \quad \text{می خواهیم نشان دهیم :}$$

حل : دو خط متمايز  $D$  و  $D'$  در صفحه  $Q$  هستند ،

کافی است نشان دهیم که متوازی می باشند یعنی ،

$$D \cap D' = \emptyset$$

برای این منظور، در مجموعه  $D \cap D'$ ، به جای  $D'$  مجموعه طرف چپ نساوی (۲) را قرار می‌دهیم:

$$D \cap D' = D \cap (P \cap Q)$$

$$= (D \cap P) \cap Q \quad \text{شرکت پذیری:}$$

$$= \emptyset \cap Q \quad \text{نساوی (۱) بالا:}$$

$$= \emptyset \quad \text{چرا؟}$$

دو خط متناظر  $D$  و  $D'$  در صفحه  $Q$  بوده و اشتراك آنها مساوی مجموعه تهی است. لذا، متوازی هستند.

مثال ۲ - هرگاه دو صفحه متوازی به وسیله صفحه سومی قطع شود نشان دهید که فصل مشترکها متوازی هستند

$$P \cap Q = \emptyset \quad (۱) \quad \text{P و Q متوازیند:}$$

$$P \cap R = D \quad (۲) \quad \text{D فصل مشترک P و R است.}$$

$$Q \cap R = D' \quad (۳) \quad \text{D' فصل مشترک Q و R است.}$$

$$D \parallel D' \quad \text{می‌خواهیم نشان دهیم:}$$

حل: دو خط متناظر  $D$  و  $D'$  در صفحه  $R$  هستند.

کافی است نشان دهیم که متوازی می‌باشند. یعنی

$$D \cap D' = \emptyset \quad \text{برای این منظور، در مجموعه}$$

$$D \cap D' \text{، به جای } D \text{ و } D' \text{ مجموعه‌های طرف چپ}$$

نساویهای (۲) و (۳) را قرار می‌دهیم:

$$D \cap D' = (P \cap R) \cap (Q \cap R)$$

$$= (R \cap P) \cap (Q \cap R) \quad \text{جابجایی:}$$

$$= R \cap [P \cap (Q \cap R)] \quad \text{شرکت پذیری:}$$

$$= R \cap [(P \cap Q) \cap R] \quad \text{شرکت پذیری:}$$

$$= R \cap [\emptyset \cap R] \quad \text{نساوی (۱) بالا:}$$

$$= R \cap \emptyset \quad \text{چرا؟}$$

$$= \emptyset$$

دو خط متناظر  $D$  و  $D'$  در صفحه  $R$  بوده و اشتراك آنها مساوی مجموعه تهی است. لذا،

متوازی هستند.



### خاصیت پخشى (توزیع پذیری)

در دوره راهنمایی دیده‌اید که هرگاه  $a$  و  $b$  و  $c$  سه عدد دلخواه باشد داریم:

$$a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$$

یعنی در مجموعه اعداد، عمل ضرب نسبت به جمع دارای خاصیت پخشى است ولى:

$$a + (b \times c) \neq (a + b) \times (a + c)$$

یعنی عمل جمع نسبت به ضرب دارای خاصیت پخشى نیست. در زیر خاصیت پخشى اجتماع

نسبت به اشتراك و برعکس را می‌بینید.

برای هر سه مجموعه  $A$  و  $B$  و  $C$  داریم:

$$\begin{aligned} A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C) \\ A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C) \end{aligned}$$

اندا درستی خواص فوق را با استفاده از يك مثال و همچنین بوسیله نمودارون تحقیق

می‌کنیم:

### تحقیق درستی خاصیت پخشى به وسیله يك مثال

مثال - برای سه مجموعه:

$$A = \{1, 2, 3\}$$

$$B = \{2, 5, 7\}$$

$$C = \{1, 4, 7\}$$

شان دهید که:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad (1)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad (2)$$

حل: برای تحقیق درستی این تساوی‌ها، مجموعه‌های طرفین آنها را می‌نویسیم:

$$A \cup B = \{1, 2, 3\} \cup \{2, 5, 7\}$$

$$= \{1, 2, 3, 5, 7\}$$

$$A \cup C = \{1, 2, 3\} \cup \{1, 4, 7\}$$

$$= \{1, 2, 3, 4, 7\}$$

$$B \cup C = \{2, 5, 7\} \cup \{1, 4, 7\}$$

$$= \{1, 2, 4, 5, 7\}$$

$$A \cap B = \{1, 2, 3\} \cap \{2, 5, 7\}$$

$$= \{2\}$$

$$A \cap C = \{1, 2, 3\} \cap \{1, 2, 7\}$$

$$= \{1\}$$

$$B \cap C = \{2, 5, 7\} \cap \{1, 2, 7\}$$

$$= \{7\}$$

$$\text{مجموعه طرف چپ تساوی (۱)} = A \cap (B \cup C)$$

$$= \{1, 2, 3\} \cap \{1, 2, 4, 5, 7\}$$

$$= \{1, 2\}$$

$$\text{مجموعه طرف راست تساوی (۱)} = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$= \{2\} \cup \{1\}$$

$$= \{1, 2\}$$

دیده می‌شود که این دو مجموعه یکی هستند. یعنی تساوی (۱) درست است. بدیهی‌ترین برای تحقیق در درستی (۲) می‌توییم.

$$\text{مجموعه طرف چپ تساوی (۲)} = A \cup (B \cap C)$$

$$= \{1, 2, 3\} \cup \{7\}$$

$$= \{1, 2, 3, 7\}$$

$$\text{مجموعه طرف راست تساوی (۲)} = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$= \{1, 2, 3, 5, 7\} \cap \{1, 2, 3, 4, 7\}$$

$$= \{1, 2, 3, 7\}$$

تمرین - درستی خواص پختی را برای سه مجموعه زیر نشان دهد.

$$A = \{a, b\}$$

$$B = \{a, c, d\}$$

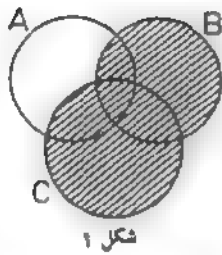
$$C = \{c, e\}$$

## تحقیق درستی خاصیت بخشی با استفاده از نمودار ون

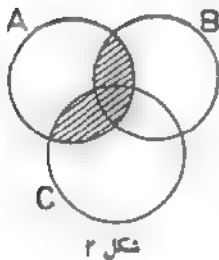
ابتدا درستی :

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

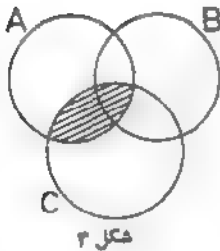
را تحقیق می‌کنیم .



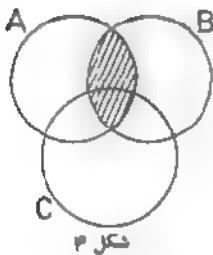
در شکل ۱ ، مجموعه  $B \cup C$  با سایه مشخص شده است .



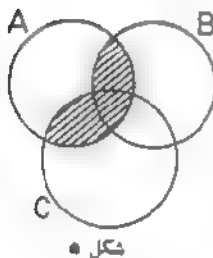
در شکل ۲ ، مجموعه  $A \cap (B \cup C)$  با سایه نشان داده شده است



در شکل ۳ ، مجموعه  $A \cap C$  با سایه نشان داده شده است .



در شکل ۴ ، مجموعه  $A \cap B$  با سایه نشان داده شده است .



در شکل ۵ ، مجموعه  $(A \cap B) \cup (A \cap C)$  ، با سایه نشان

داده شده است .

شکلهای ۲ و ۵ يك ناحیه را مشخص می‌سازند . لذا ، دو مجموعه

$A \cap (B \cup C)$  و  $(A \cap B) \cup (A \cap C)$  متساویند .

تمرین - با روش فوق درستی تساوی زیر را تحقیق کنید :

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

### اثبات درستی خاصیت بخشی

درستی خاصیت بخشی اجتماع نسبت به اشتراك و برعكس را، با مثال و نمودار تحقیق

کردیم . اکنون درستی :

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad \text{را اثبات می کنیم .}$$

$$x \in A \cap (B \cup C)$$

اولا فرض کنیم ،

$$x \in A \cap (B \cup C) \rightarrow x \in A \wedge x \in B \cup C$$

تعریف اشتراك :

$$\rightarrow x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C)$$

تعریف اجتماع :

$$\rightarrow (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C) : \text{توزیع پذیری } \wedge \text{ بر } \vee$$

$$\rightarrow (x \in A \cap B) \vee (x \in A \cap C)$$

تعریف اشتراك :

$$\Rightarrow x \in [(A \cap B) \cup (A \cap C)]$$

پس طبق تعریف زیر مجموعه داریم :

$$[A \cap (B \cup C)] \subset [(A \cap B) \cup (A \cap C)] \quad (1)$$

$$: x \in [(A \cap B) \cup (A \cap C)] \quad \text{ثانیا فرض کنیم :}$$

$$x \in [(A \cap B) \cup (A \cap C)] \rightarrow x \in (A \cap B) \vee x \in (A \cap C) \quad \text{تعریف اجتماع :}$$

$$\rightarrow (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C) \quad \text{تعریف اشتراك :}$$

$$\rightarrow x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C)$$

توزیع  $\wedge$  بر  $\vee$  :

$$\rightarrow x \in A \wedge (x \in B \cup C)$$

تعریف اجتماع :

$$\rightarrow x \in A \cap (B \cup C)$$

تعریف اشتراك :

پس طبق تعریف زیر مجموعه خواهیم داشت :

$$(A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C) \quad (2)$$

از مقایسه (1) و (2) نتیجه می شود :

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

تمرین - با استفاده از همین روش ثابت کنید که :

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

مثال ۱- نشان دهید :

$$A' \cap (A \cup B) = B - A$$

حل : طرف چپ این تساوی را ساده می کنیم تا طرف راست به دست آید :

$$\begin{aligned} A' \cap (A \cup B) &= (A' \cap A) \cup (A' \cap B) && \text{خاصیت بخشی} \\ &= \emptyset \cup (A' \cap B) && \text{چرا ؟} \\ &= A' \cap B && \text{چرا ؟} \\ &= B \cap A' && \text{چرا ؟} \\ &= B - A && \text{چرا ؟} \end{aligned}$$

مثال ۲- نشان دهید :

$$A \cup (B' - A) = A \cup B'$$

حل : مثل تمرین قبل عمل می کنیم :

$$\begin{aligned} A \cup (B' - A) &= A \cup (B' \cap A') && \text{چرا ؟} \\ &= (A \cup B') \cap (A \cup A') && \text{خاصیت بخشی :} \\ &= (A \cup B') \cap M && \text{چرا ؟} \\ &= A \cup B' && \text{چرا ؟} \end{aligned}$$

مثال ۳- نشان دهید :

$$A \cup (A \cap B) = A$$

حل می داسم که  $A \cap M$  هرگاه در طرف چپ این تساوی به جای مجموعه  $A$  بیرون برانتز ، مجموعه  $A \cap M$  را قرار دهیم نتیجه می شود

$$\begin{aligned} A \cup (A \cap B) &= (A \cap M) \cup (A \cap B) \\ &= A \cap (M \cup B) && \text{خاصیت بخشی :} \\ &= A \cap M && \text{چرا ؟} \\ &= A && \text{چرا ؟} \end{aligned}$$

مثال ۴- نشان دهید :

$$(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) \cap (A' \cup B')$$

$(A - B) \cup (B - A)$  را تعادل متفاوت  $A$  و  $B$  می نامند

حل : در این تمرین طرف راست را ساده می کنیم تا طرف چپ به دست آید. برای این مقدر  $A \cup B$  را یک مجموعه فرض نموده و آنرا  $N$  بگوئیم :

$$\begin{aligned} (A \cup B) \cap (A' \cup B') &= [(A \cup B) \cap A'] \cup [(A \cup B) \cap B'] \\ &= [A' \cap (A \cup B)] \cup [B' \cap (A \cup B)] && \text{چرا ؟} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= [(A' \cap A) \cup (A' \cap B)] \cup [(B' \cap A) \cup (B' \cap B)] && \text{خاصیت پخشى:} \\
 &= [\emptyset \cup (A' \cap B)] \cup [(B' \cap A) \cup \emptyset] && \text{چرا؟} \\
 &= (A' \cap B) \cup (B' \cap A) && \text{چرا؟} \\
 &= (B \cap A') \cup (A \cap B') && \text{چرا؟} \\
 &= (A \cap B') \cup (B \cap A') && \text{چرا؟} \\
 &= (A - B) \cup (B - A) && \text{چرا؟}
 \end{aligned}$$

### تمرین

۱- برای مجموعه‌های  $A = \{a, b, c, d\}$ ،  $B = \{a, b, f\}$  و  $C = \{a, f, g\}$  دوستی تساویهای زیر را نشان دهید:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C \quad \text{الف} \quad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

۲- مجموعه‌های  $P = \{p, q, r, t\}$ ،  $Q = \{q, r, s\}$  و  $R = \{p, m, n\}$  را در نظر بگیرید، آن‌گاه نشان دهید که:

$$P \cap (Q - R) = (P \cap Q) - (P \cap R)$$

(خاصیت پخشى اشتراك نسبت به تقاضل)

۳- هرگاه  $A$  و  $B$  دو مجموعه جدا از هم باشند ثابت کنید که  $A - B = A$

۴- هرگاه  $A$  و  $B$  دو مجموعه جدا از هم باشند ثابت کنید که:

$$R' \cap (A \cup B) = A$$

۵- ثابت کنید:

$$A \cap (B - A) = \emptyset \quad \text{الف} \quad (B - A) \cap (A \cap B) = \emptyset \quad \text{ب}$$

$$A \cup (B - A) = A \cup B \quad \text{ج} \quad (A - B) \cap (B - A) = \emptyset \quad \text{د}$$

$$(A - B) \cup (A \cap B) = A \quad \text{ه}$$

۶- اگر  $A \subset B$ ، ثابت کنید که

$$A \cup (B - A) = B$$

۷- ثابت کنید:

$$(A \cap B) \cup (A \cap B') = A \quad \text{الف}$$

$$(A' \cup B') \cap (A' \cup B) = A' \quad \text{ب}$$

$$(A \cup B) \cup (A - B) = A \cup B \quad \text{ج}$$

$$A \cap (B - C) = (A \cap B) - C \quad \text{د}$$

$$A - B = B' - A' \quad \text{ه}$$

$A' - B = B' - A$	و -
$A \cap (A - B') = A \cap B$	ز -
$A \cup (B \cap C \cap D) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \cap (A \cup D)$	ح -
$A \cap (B \cup C \cup D) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (A \cap D)$	ط -
$(A' \cup B') \cap (A' \cup B) \cap (A \cup B) = B - A$	ی -

### قوانین دمرگان<sup>۱</sup>

متم يك مجموعه را قبلأ دیدید ، اکنون می‌خواهیم متمم اجتماع دو مجموعه ،  $(A \cup B)'$  ، و متمم اشتراك دو مجموعه ،  $(A \cap B)'$  ، را مورد بحث قرار دهیم . اولی کسی که این متممها را حساب کرد دموگان ریاضی‌دان انگلیسی بود . دمرگان نشان داد که برای هر دو مجموعه  $A$  و  $B$  تساویهای زیر برقرار است .

$$\begin{aligned}(A \cup B)' &= A' \cap B' \\ (A \cap B)' &= A' \cup B'\end{aligned}$$

یعنی :

متمم اجتماع دو مجموعه مساوی اشتراك متممهای آنهاست و  
متمم اشتراك دو مجموعه مساوی اجتماع متممهای آنها می‌باشد .

اکنون درستی این قوانین را به وسیله يك مثال و همچنین با استفاده از نمودار ون تحقیق می‌کنیم

### تحقیق درستی قوانین دمرگان بوسیله يك مثال

مثال - مجموعه‌های  $A = \{a, e, i\}$  و  $B = \{a, u\}$  از مجموعه مرجع  $M = \{a, e, i, o, u\}$  را در نظر گرفته درستی رابطه‌های زیر را تحقیق کنید.

$$(A \cup B)' = A' \cap B' \quad (۱)$$

$$(A \cap B)' = A' \cup B' \quad (۲)$$

حل : مجموعه‌های طرفین تساویها را می‌نویسیم :

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{a, e, i\} \cup \{a, u\} \\ &= \{a, e, i, u\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A \cap B &= \{a, e, i\} \cap \{a, u\} \\ &= \{a\} \end{aligned}$$

$$A' = \{o, u\} \quad ; \quad B' = \{e, i, o\}$$

$$\begin{aligned} \text{مجموعه طرف چپ تساوی (۱)} &= (A \cup B)' \\ &= \{a', e', i', o, u\} \\ &= \{o\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{مجموعه طرف راست تساوی (۱)} &= A' \cap B' \\ &= \{o, u\} \cap \{e, i, o\} \\ &= \{o\} \end{aligned}$$

دیده می‌شود که این دو مجموعه مساویست. همچنین در زیر تساوی دو مجموعه  $(A \cap B)'$  و

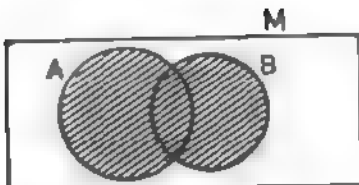
$$\begin{aligned} A' \cup B' \text{ را می‌بیند.} \\ \text{مجموعه طرف چپ تساوی (۲)} &= (A \cap B)' \\ &= \{a', e, i, o, u\} \\ &= \{e, i, o, u\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{مجموعه طرف راست تساوی (۲)} &= A' \cup B' \\ &= \{o, u\} \cup \{e, i, o\} \\ &= \{e, i, o, u\} \end{aligned}$$

تحقیق درستی قوانین دهرگان با استفاده از نمودار ون  
ابتدا درستی :

$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$

را نشان می‌دهیم .

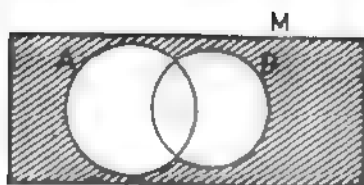


شکل ۱

در شکل ۱، مجموعه  $A \cup B$  با سایه

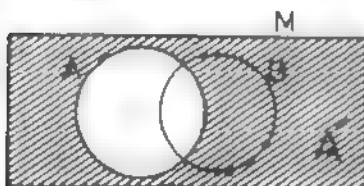
نشان داده شده است .





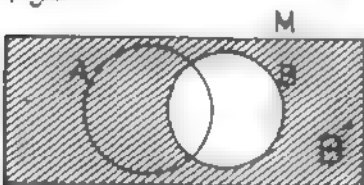
شکل ۲

در شکل ۲ . مجموعه  $(A \cup B)'$  با سایه مشخص شده است



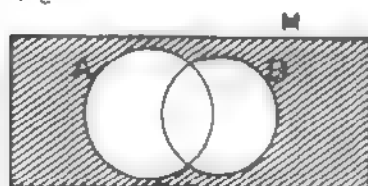
شکل ۳

در شکل ۳ . مجموعه  $A'$  با سایه نشان داده شده است .



شکل ۴

در شکل ۴ . مجموعه  $B'$  با سایه نشان داده شده است .



شکل ۵

در شکل ۵ . مجموعه  $A' \cap B'$  با سایه مشخص شده است

شکل‌های ۲ و ۵ يك ناحیه را مشخص می‌سازند .  
یعنی مجموعه‌های  $(A \cup B)'$  و  $A' \cap B'$  مساوند

تمرین - با استفاده از همین روش نشان دهید که :

$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$

### اثبات درستی قوانین دمرگان

درستی قوانین دمرگان را با مثل و نمودار دیدید . اکنون درستی تساوی ،

$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$

را ثابت می‌کنیم

اولا فرض کنیم ،  $x \in (A \cup B)'$  داریم :

$$x \in (A \cup B)' \Rightarrow x \notin A \cup B \quad \text{تعریف منم :$$

$$\Rightarrow x \notin A \wedge x \notin B \quad \text{تعریف اجتماع :$$

$$\Rightarrow x \in A' \wedge x \in B' \quad \text{تعریف منم :$$

$$\Rightarrow x \in A' \cap B' \quad \text{تعریف اشتراك :$$

پس طبق تعریف زیر مجموعه داریم :

$$(A \cup B)' \subset A' \cap B' \quad (1)$$

ثانیاً فرض کنیم  $x \in A' \cap B'$  داریم :

$$x \in A' \cap B' \Rightarrow x \in A' \wedge x \in B' \quad \text{تعریف اشتراک} :$$

$$\Rightarrow x \notin A \wedge x \notin B \quad \text{تعریف متمم} :$$

$$\Rightarrow x \notin (A \cup B) \quad \text{تعریف اجتماع} :$$

$$\Rightarrow x \in (A \cup B)' \quad \text{تعریف متمم} :$$

پس طبق تعریف زیر مجموعه داریم :

$$A' \cap B' \subset (A \cup B)' \quad (2)$$

از مقایسه (۱) و (۲) نتیجه می شود :

$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$

تمرین - ما استفاده از همین روش ثابت کنید که :

$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$

مثال ۱- نشان دهید :

$$A' - B = (A \cup B)'$$

حل : مجموعه طرف چپ تساوی را ساده می کنیم تا طرف راست به دست آید :

$$A' - B = A' \cap B' \quad \text{چرا؟}$$

$$= (A \cup B)' \quad \text{قانون دمرگان} :$$

مثال ۲- نشان دهید :

$$(A \cup B) \cap (A' \cap B') = \emptyset$$

حل : مثل تمرین قبل عمل می کنیم :

$$(A \cup B) \cap (A' \cap B') = (A \cup B) \cap (A \cup B)'$$

$$X \cap X' \quad \text{اگر } A \cup B = X \text{ بگیریم نتیجه می شود}$$

$$= \emptyset \quad \text{چرا؟}$$

مثال ۳- هرگاه  $A \subset B$  باشد ، نشان دهید که  $B' \subset A'$

حل : دیدید که «از  $A \subset B$  نتیجه می شود  $A \cap B = A$  و  $A \cup B = B$ » و برعکس «اگر  $A \cap B = A$  و  $A \cup B = B$  باشد ، آنگاه  $A \subset B$ »

به این نکته از فرض نتیجه می‌شود :

$$\begin{aligned} A \cup B &= B \\ (A \cup B)' &= B' && \text{یا :} \\ A' \cap B' &= B' && \text{قانون دمرگان :} \\ B' &\subset A' && \text{در نتیجه :} \end{aligned}$$

مثال ۴- نشان دهید :

$$A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$$

(توزیع پذیری اشتراک نسبت به تفاضل)

حل : طرف راست تساوی را ساده می‌کنیم تا طرف چپ بدست آید :

$$\begin{aligned} (A \cap B) - (A \cap C) &= (A \cap B) \cap (A \cap C)' && \text{چرا ؟} \\ &= (A \cap B) \cap (A' \cup C') && \text{قانون دمرگان :} \\ &= [(A \cap B) \cap A'] \cup [(A \cap B) \cap C'] && \text{چرا ؟} \\ &= [A' \cap (A \cap B)] \cup [(A \cap B) \cap C'] && \text{چرا ؟} \\ &= [(A' \cap A) \cap B] \cup [(A \cap (B \cap C'))] && \text{چرا ؟} \\ &= [\emptyset \cap B] \cup [A \cap (B \cap C')] && \text{چرا ؟} \\ &= \emptyset \cup [A \cap (B \cap C')] && \text{چرا ؟} \\ &= A \cap (B \cap C') && \text{چرا ؟} \\ &= A \cap (B - C) && \text{چرا ؟} \end{aligned}$$

تمرین

۱- مجموعه‌های  $P = \{q, r, s\}$  و  $Q = \{k, r, m\}$  از مجموعه مرجع  $M = \{k, m, q, r, s, t\}$  را در نظر گرفته نشان دهید که :

$$(P \cup Q)' = P' \cap Q' \quad ; \quad (P \cap Q)' = P' \cup Q' \quad ; \quad (P - Q)' = Q \cup P'$$

۲- مجموعه‌های  $A = \{a, b, c, d, e\}$  و  $B = \{a, b, f\}$  و  $C = \{f, g, h\}$  را

در نظر گرفته نشان دهید که :

$$A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C) \quad \text{الف -}$$

$$(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B) \quad \text{ب -}$$

۳- ثابت کنید :

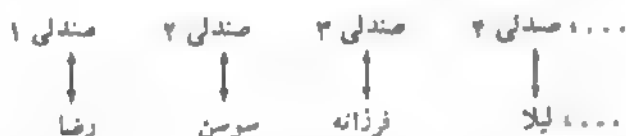
$$(A - B)' = B \cup A' \quad \text{الف -}$$

- ب-  $(A \cup B \cup C)' = A' \cap B' \cap C'$
- ج-  $(A \cap B \cap C)' = A' \cup B' \cup C'$
- د-  $A - (A \cap B) = A - B$
- ه-  $(A' \cup B')' = A \cap B$
- و-  $(A' \cap B')' = A \cup B$
- ز-  $(A \cup B)' - C = (A \cup B \cup C)'$
- ح-  $(A \cup B' \cup C') \cap [A \cup (B \cap C)] = A$
- ط-  $(A \cup B) - (B \cup C) = (A - B) - C$

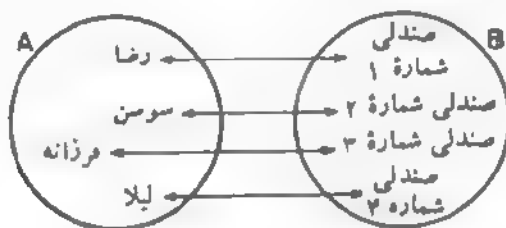
### تناظر يك به يك

قبل از تعريف تناظر يك به يك بمثالهاي ذيرتوجه كنيد .

مثال ۱ - صندليهاي تالار يك مدرسه طوري است كه هر دانش آموز روي يك صندلي مي نشيد و هر صندلي مخصوص يك دانش آموز است . يعني ، بعد از نشستن دانش آموزان روي صندليها ، صندلي خالي در تالار باقي نمي ماند ، در ضمن هيچ دانش آموزي نيز بي صندلي وابسته نيست . تحت اين شرايط گفته مي شود بين مجموعه صندليهاي تالار و مجموعه دانش آموزان يك تناظر يك به يك وجود دارد . اين تناظر را به صورتهاي زير نشان مي دهد .

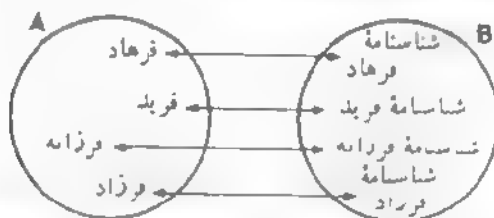


... صندلي ۴ ← ليلا، صندلي ۳ ← فرزانه، صندلي ۲ ← سوسن، صندلي ۱ ← رضا



مثال ۲ - بين مجموعه شناسنامه هاي موجود در ايران و مجموعه مردم ايران يك تناظر يك

به يك وجود دارد. مبنی هر شناسنامه متعلق به يك نفر و هر نفر قانوناً يك شناسنامه دارد.



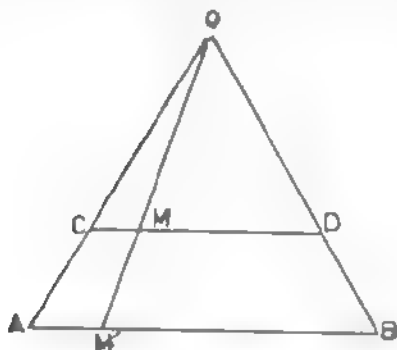
تعریف - بین دو مجموعه  $A$  و  $B$  يك قناطر يك به يك وجود دارد هرگاه بتوان به هر عضو  $A$  يك و تنها يك عضو  $B$  و به هر عضو  $B$  يك و تنها يك عضو  $A$  را نسبت داد.

مثال ۳ - سی مجموعه اعداد طبیعی و اعداد زوج مثبت يك به يك وجود دارد.



مثال ۴ - دو پاره خط  $AB$  و  $CD$  غير متساوی و متوازی. از  $A$  به  $C$  و از  $B$  به  $D$  وصل

کرده متناظر می‌دهیم تا همدیگر را در نقطه  $O$  قطع کنند. نقطه دلخواه  $M$  را روی  $CD$  در نظر گرفته خط  $OM$  را امتداد می‌دهیم تا  $AB$  را در  $M'$  قطع کند. نقطه  $M'$  نظیر  $M$  روی  $AB$  است. چون



$M$  نقطه دلخواهی است به این ترتیب هر نقطه روی  $CD$  در نظر گرفته شود. می‌توان نظیر آن را روی  $AB$  به دست آورد. و هیچ نقطه‌ای روی  $CD$  وجود ندارد که نظیر آن روی  $AB$  نباشد. همچنین نظیر هر نقطه دلخواه  $M'$  از  $AB$  يك نقطه  $M$  روی  $CD$  وجود دارد. به عبارت دیگر بین مجموعه نقاط دو پاره خط يك تناظر يك به يك وجود دارد.

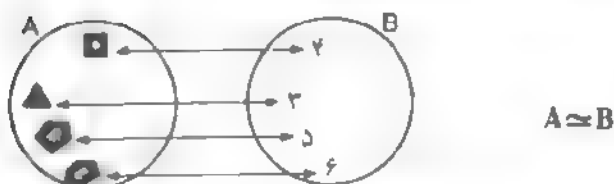
دو مجموعه هم‌ارز (معادل)

در مثالهای فوق :

- مجموعه صدهای تالار ، با مجموعه دانش‌آموزان هم‌ارز می‌باشد .
- مجموعه مردم ایران ، با مجموعه شناسنامه‌های آنها هم‌ارز می‌باشد .
- مجموعه اعداد طبیعی با مجموعه اعداد زوج مثبت هم‌ارز است .
- مجموعه نقاط پاره خط  $AB$  با مجموعه نقاط پاره خط  $CD$  هم‌ارز است .

تعریف - دو مجموعه  $A$  و  $B$  (۱) همدارز یا معادل گویند، هرگاه يك تناظر يك به يك بين اعضاي آنها وجود داشته باشد.

دومجموعه  $A$  و  $B$  را كه هم ارز باشند بصورت زیر نمایش می‌دهد.



آيا مجموعه حروف الفبای فارسی با مجموعه اعداد  $\{۱, ۲, ۳, \dots, ۳۲\}$  هم ارز است ؟

مجموعه‌های متناهی ( با پایان ) و نامتناهی ( بی پایان )

اولین تقسیم بدی و تمایز مجموعه‌ها تقسیم آنها به مجموعه‌های متناهی و نامتناهی است. مجموعه‌های زیر متناهی هستند :

$$\emptyset, \{a\}, \{1\}, \{1, 2\}, \{\text{سوسن}, \text{رضا}\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}$$

روشن است كه عضوهای مجموعه متناهی :

$$A = \{a, b, c, d, e\}$$

را می‌توان شمرد و گفت ۵ عضودارد. این شمردن درحقیقت ایجاد يك تناظر يك به يك بين عضوهای

مجموعه  $A$  و مجموعه  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$  است. یعنی :

$$\begin{array}{ccccccccc} a & , & b & , & c & , & d & , & e \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ 1 & , & 2 & , & 3 & , & 4 & , & 5 \end{array}$$

یا

$$\{a, b, c, d, e\} \approx \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

همچنین وقتی می‌گوییم عضوهای مجموعه :

$$B = \{a, b, c, d, e, \dots, x, y, z\}$$

را شمرده‌ایم و دارای ۲۶ عضو است، باز بین عضوهای مجموعه  $B$  و مجموعه اعداد طبیعی اريك

تا ۲۶ يك تناظر يك به يك درنظر گرفته‌ایم :

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccccccccccc} a & , & b & , & c & , & d & , & e & , & \dots & , & x & , & y & , & z \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ 1 & , & 2 & , & 3 & , & 4 & , & 5 & , & \dots & , & 24 & , & 25 & , & 26 \end{array}$$

$$\{a, b, c, d, e, \dots, x, y, z\} \cong \{1, 2, 3, 4, 5, \dots, 22, 25, 26\}$$

اگر مجموعه مفروضی مثل  $C$  دارای  $k$  عضو باشد، ( $k$  عدد طبیعی است) در این صورت:

$$C \cong \{1, 2, 3, \dots, k\}$$

هر کدام از مجموعه‌های:

$$\{1, 2, 3, 4, 5\}, \{1, 2, 3, \dots, 26\}, \{1, 2, 3, \dots, k\}$$

را يك قطعه اعداد طبیعی نامیده آنها را به صورتهای زیر نشان می‌دهند.

$$N_5 = \{1, 2, 3, 4, 5\}, N_{26} = \{1, 2, 3, \dots, 26\}, N_k = \{1, 2, 3, \dots, k\}$$

( $N_k$  قطعه اعداد طبیعی در حالت کلی است)

تعریف - يك مجموعه متناهی است هرگاه نهی بوده یا هم از قطعه‌ای از مجموعه اعداد طبیعی باشد.

باید دانست که عضوهای مجموعه متناهی ممکن است خیلی زیاد باشد. مثلاً مجموعه تمام دانه‌های شن موجود روی کره زمین يك مجموعه متناهی است. اگر قطعه  $N_k$  برای شمردن این مجموعه به کار برود روشن است که  $k$  عدد بسیار بزرگی خواهد بود.

هر مجموعه‌ای که متناهی باشد نامتناهی خوانده می‌شود. مجموعه‌های زیر نامتناهی هستند.

$$N = \{1, 2, 3, \dots\}, E = \{2, 4, 6, \dots\}, F = \{1, 3, 5, \dots\}$$

مجموعه اعداد حقیقی بین صفر و يك نیز نامتناهی است. همچنین مجموعه نقاط يك پاره خط يك مجموعه نامتناهی می‌باشد.

### عدد عضوهای مجموعه متناهی (عدد اصلی یا عدد يك مجموعه)

دهد بد که مجموعه  $A$  را متناهی گویند، هرگاه  $A$  نهی بوده یا با یکی از مجموعه‌های  $N_k$  هم‌ارز باشد:

$$A \cong N_k$$

$k$  را عدد عضوها یا عدد اصلی مجموعه  $A$  خوانده آن را با  $n(A)$  نمایش می‌دهند.

$$n(A) = k$$

طبق آنچه راجع به مجموعه‌های هم‌ارز گفته شد می‌توان نوشت:

$$\{2\} \cong \{a\} \cong \{\text{رضا}\} \cong \{\text{سب}\} \cong \{\text{تهران}\} \cong \dots \cong N_1$$

$$\{2, 3\} \cong \{a, b\} \cong \{\text{رضا، سوسن}\} \cong \{\text{سب، گلای}\} \cong \{\text{اصفهان}\} \cong \dots \cong N_2$$

$$\{1, 2, 3\} \cong \{a, b, c\} \cong \{\text{فرزانه، رضا، سوسن}\} \cong \{\text{تهران، اصفهان، مشهد}\} \cong \dots \cong N_3$$

.....

$$A \subseteq B \subseteq C \subseteq \dots \subseteq N_k$$

یعنی ۱. عدد اصلی تمام مجموعه‌های یک‌عضوی است. ۲. عدد اصلی تمام مجموعه‌های دو عضوی است. ۳. عدد اصلی تمام مجموعه‌های سه عضوی است. . . . و  $k$  عدد اصلی تمام مجموعه‌های  $k$  عضوی است. عدد اصلی مجموعه‌ی تهی چیست؟  
به‌طور کلی در مورد عدد اصلی مجموعه‌ها کافی است بدانیم که:  
اگر دو مجموعه هم‌ارز باشند، اعداد اصلی آنها مساوی است و برعکس اگر اعداد اصلی دو مجموعه مساوی باشند، آن‌گاه دو مجموعه هم‌ارز می‌باشند.

مثال ۱ - دو مجموعه  $A = \{a, b, c\}$  و  $B = \{d, e, f, g, h\}$  داده شده‌اند. عدد اصلی مجموعه  $A \cup B$  را حساب کنید.

حل: مجموعه  $A \cup B$  را می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{a, b, c\} \cup \{d, e, f, g, h\} \\ &= \{a, b, c, d, e, f, g, h\} \end{aligned}$$

$$n(A \cup B) = 8 \quad \text{دیده می‌شود که:}$$

$$n(A) = 3 \quad \text{همچنین داریم:}$$

$$n(B) = 5$$

و

$$8 = 3 + 5$$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) \quad \text{روشن است که:}$$

یا

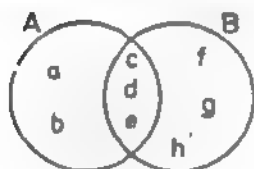
در حالت کلی می‌توان نشان داد که<sup>۱</sup>

هرگاه  $A$  و  $B$  دو مجموعه متناهی و جدا از هم باشند، مجموعه  $A \cup B$  متناهی بوده و

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) \quad \text{داریم؟}$$

مثال ۲ - برای دو مجموعه  $A = \{a, b, c, d, e\}$  و  $B = \{c, d, e, g, h, f\}$ ،

$n(A \cup B)$  را حساب کنید.



حل: مجموعه‌های  $A \cup B$  و  $A \cap B$  را می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{a, b, c, d, e\} \cup \{c, d, e, g, h, f\} \\ &= \{a, b, c, d, e, f, g, h\} \end{aligned}$$

۱- در این سطح ما از ذکر استدلال خودداری می‌کنیم.



$$A \cap B = \{a, b, c, d, e\} \cap \{c, d, e, f, g, h\} \\ = \{c, d, e\}$$

$$n(A \cup B) = 8 \quad \text{دیده می شود که :}$$

$$n(A \cap B) = 3 \quad \text{و}$$

$$n(A) = 5 \quad \text{همچنین داریم :}$$

$$n(B) = 6 \quad \text{و}$$

روشن است که می توان نوشت :

$$8 = 5 + 6 - 3$$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \quad \text{با}$$

در حالت کلی می توان نشان داد که :

هرگاه  $A$  و  $B$  دو مجموعه متناهی و دلخواه باشند داریم :

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

استفاده از عدد اصلی مجموعه ها در حل بعضی از مسائل حساب

**مثال ۱ -** ضمن مصادف با ۴ مهر از کارمندان یک اداره معلوم شد که ۲۰ نفر دارای تحصیلات دانشگاهی و ۶ نفر صاحب اتومبیل هستند و ۱۶ نفر تعدادی تحصیلات دانشگاهی و بد صاحب اتومبیل می باشد. در صورتی که  $C$  مجموعه کارمندان دارای تحصیلات دانشگاهی و  $P$  مجموعه کارمندان صاحب اتومبیل باشد، مطلوب است محاسبه :

$$n(C') : n(P') : n(C) + n(P) : n(C \cup P) : n(C \cap P)$$

**حل :** طبق فرض  $n(C) = 20$  و  $n(P) = 6$ ، در نتیجه خواهیم داشت :

$$n(C') = 20 \quad \text{و} \quad n(P') = 24$$

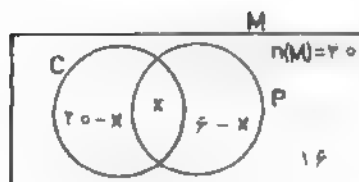
$$n(C) + n(P) = 20 + 6$$

$$= 26$$

$$n(C \cup P) = 20 - 16$$

$$= 24$$

$$n(C \cup P) = n(C) + n(P) - n(C \cap P)$$



۱- در حل، اعدادی که داخل نمودارهای مجموعه ها نوشته شده است، تعداد عضوهای

خود عضوها

$$n(C \cap P) = n(C) + n(P) - n(C \cup P) \quad \text{یا}$$

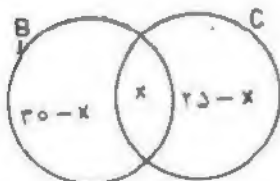
$$= 20 + 6 - 24$$

$$= 2$$

$$\boxed{x = 2}$$

مثال ۳ - در يك كلاس ۴۵ نفر دانش آموز است . هر كدام از اين دانش آموزان كفش مشكي يا كت قهوه‌اي پوشيده‌اند. در صورتي كه بدانيم ۳۰ نفر كفش مشكي و ۲۵ نفر كت قهوه‌اي پوشيده‌اند ، تعيين كيد چند نفر كفش مشكي و كت قهوه‌اي پوشيده‌اند .

حل : مجموعه دانش آموزاني را كه كفش مشكي پوشيده‌اند به B و مجموعه دانش آموزاني را كه كت قهوه‌اي به تن دارند به C نمايش مي‌دهيم .  
طبق فرض داريم :



$$n(B) = 30 \quad ; \quad n(C) = 25 \quad ; \quad n(B \cup C) = 45$$

همچنين داريم :

$$n(B \cup C) = n(B) + n(C) - n(B \cap C)$$

$$n(B \cap C) = n(B) + n(C) - n(B \cup C) \quad \text{یا}$$

$$= 30 + 25 - 45$$

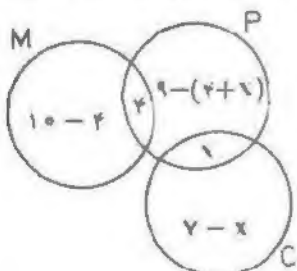
$$= 10$$

$$\boxed{x = 10}$$

مثال ۳ - از يك گروه ۲۰ نفری دبيران علوم ، ۱۰ نفر رياضي ، ۹۰ نفر فزيك و ۷ نفر شيمي تدريس مي‌کنند . در صورتي كه بدانيم ۴ نفر از دبيران فزيك و رياضي تدريس مي‌کنند و هيچ كدام از دبيران رياضي درس شيمي نمي‌دهند معلوم كيد :

الف - تعداد معلميني كه فزيك و شيمي درس مي‌دهند .  
ب - تعداد معلميني كه فقط فزيك تدريس مي‌نمايند .

حل : مجموعه‌هاي معلمين رياضي ، فزيك و شيمي را به ترتيب به M ، P و C نمايش مي‌دهيم . در اين صورت خواهيم داشت :



$$n(M \cup P \cup C) = 20 \quad ; \quad n(M) = 10$$

$$n(P) = 9 \quad ; \quad n(C) = 7$$

$$n(M \cap P) = 4 \quad ; \quad n(M \cap C) = 0$$

$$n(P \cap C) = ?$$

با روشی مشابه آنچه در مورد  $n(A \cup B)$

گفته شد نشان داده می‌شود که :

$$n(M \cup P \cup C) = n(M) + n(P) + n(C) - n(M \cap P) - n(M \cap C) - n(P \cap C) + n(M \cap P \cap C)$$

با توجه به این فرمول و مفروضات مسئله خواهیم داشت :

$$20 = 10 + 9 + 7 - 2 - 0 - n(P \cap C) + 0$$

$$n(P \cap C) = 2$$

یا

یعنی تعداد معلمینی که فیزیک و شیمی درس می‌دهند مساوی ۲ می‌باشد و تعداد معلمینی که فقط

فیزیک درس می‌دهند عبارت است از :  $9 - (2 + 2) = 3$

راه حل دوم - مجموع تمام عضوهای مجموعه‌هایی که در شکل بالا نشان داده شده‌اند

مساوی ۲۰ قرار می‌دهیم :

$$(10 - 2) + 2 + 9 - (2 + x) + x + 7 - x = 20$$

از حل معادله بدست می‌آید .  $x = 2$

تمرین

۱- کدام يك از مجموعه‌های زیر متاهی است ؟

الف - مجموعه کتابهایی که از بدو خلقت تا کنون به زبانهای موجود روی زمین منتشر

شده است .

ب - مجموعه  $\{2x \mid x \in \mathbb{N}\}$

ج - مجموعه مضربهای مثبت ۱۰

د - مجموعه اعداد اول

ه - مجموعه کتابهایی که در حال حاضر در کتابخانه‌های روی زمین موجود است .

و - مجموعه تارهای موهای مردم روی زمین

ز - مجموعه  $\{-x \mid x \in \mathbb{N}\}$

۲- مجموعه‌هایی ذکر کنید که با مجموعه‌های زیر دارای يك عدد اصلی باشند .

الف - مجموعه کلیدهای اتاقهای يك هتل

ب - مجموعه اعداد زوج از يك تا صد

ج - مجموعه اعداد صحیح مربع کمل واقع بین ۲ و ۱۷۰

د - مجموعه مضربهای ۳

۳ - در يك کلاس ۴۰ نفر دانش‌آموز است . ۱۶ نفر از این دانش‌آموزان در تیم فوتبال

مدرسه و ۱۲ نفر در تیم والیبال عضویت دارند. دو نفر از این دانش آموزان نیز عضو هیچ تیم ورزشی نیستند. تعیین کنید چند نفر از دانش آموزان عضو مشترک تیمهای والیبال و فوتبال مدرسه هستند.

۲- ۲۰۰ نفر از دانش آموزان يك دبیرستان در فیزيك یا شیمی تجدید هستند. در صورتی که بدانیم ۱۵۰ نفر در فیزيك و ۱۳۰ نفر در شیمی تجدید دارند. تعیین کنید چند نفر در هر دو درس تجدید هستند.

۵- يك باشگاه ورزشی ۵۰ نفر عضو دارد. ۱۵ نفر عضو تیم بسکتبال و ۲۰ نفر عضو تیم فوتبال باشگاه می باشند. در ضمن سه نفر عضو مشترک تیمهای بسکتبال و والیبال و ۶ نفر عضو مشترک تیمهای والیبال و فوتبال و ۵ نفر عضو مشترک تیمهای بسکتبال و فوتبال می باشند. ۷ نفر نیز عضو هیچ تیم باشگاه نیستند. تعیین کنید: الف - تعداد افرادی که فقط عضو تیم فوتبال می باشند. ب - تعداد افرادی که فقط عضو تیم بسکتبال هستند.

۶- ۵۰ نفر دانش آموز در يك کلاس نقوشی ثبت نام کرده اند. ۱۸ نفر از آنها شیمی و ۱۷ نفر زبان خارجه و ۲۲ نفر فیزيك و تمام آنها ریاضی می خوانند. از طرفی ۵ نفر فیزيك و شیمی، ۷ نفر فیزيك و زبان، و ۶ نفر شیمی و زبان و دو نفر تمام این مواد را می خوانند. تعیین کنید چند نفر فقط دوس ریاضی می خوانند.

۷- از صد دستگاه اتومیل آزمایش فنی به عمل آمده است در نتیجه ۵۹ دستگاه سالم و بقیه نقایص زیر را داشته اند:

۱- نقص ترمز تنها	۱۲	دستگاه
۲- نقص ترمز و فرمان	۵	«
۳- نقص ترمز و چراغ	۸	«
۴- نقص چراغ و فرمان	۵	«
۵- نقص ترمز و فرمان و چراغ	۳	«

در ضمن تعداد اتومبیلهایی که نقص فنی چراغ یا فرمان داشته اند مساویند. تعیین کنید:

اولا - تعداد اتومبیلهایی که نقص چراغ دارند.

ثانیا - تعداد اتومبیلهایی که فقط يك نقص دارند.

تمرینات مختلف

۱- مجموعه  $\emptyset$  و  $\{\emptyset\}$  با هم چه فرقی دارند؟

۲- ثابت کنید هرگاه  $A - B = B - A$ ، آن گاه  $A = B$ .

۳- اگر  $A \subset B$ ، ثابت کنید که:

الف -  $B' \subset A'$  ، ب -  $A' \cup B = M$  ، ج -  $A \cap B' = \emptyset$

و برعکس ( یعنی از الف ، ب ، یا ج نیز نتیجه می شود  $A \subset B$  )

۴- هرگاه  $A \subset B$  و  $C \subset D$  ، ثابت کنید که :

$$A \cup C \subset B \cup D$$

$$A \cap C \subset B \cap D$$

۵- ثابت کنید هرگاه  $A \subset B \subset C$  ، آن گاه ،  $A \cup B = B \cap C$  .

۶- ثابت کنید هرگاه  $A$  و  $B$  دو مجموعه جدا از هم باشند آن گاه  $(A' \cup B) \cap A = \emptyset$

۷- ثابت کنید هرگاه  $A - B = A$  ، آن گاه  $B - A = B$

۸- ثابت کنید هرگاه  $A \cup B = A - B$  ، آن گاه  $B = \emptyset$  .

۹- هرگاه  $A \cap B = \emptyset$  ، ثابت کنید که :

$$(A - B) \cup (B - A) = A \cup B$$

۱۰- درجه صورت اجتماع دو مجموعه مساوی اشتراك همان دو مجموعه است .

$$A \cup B = A \cap B$$

۱۱- ثابت کنید :

$$(A - B) \cap C = (A \cap C) - B$$

الف -

$$B \cup (A - B) = A \cup B$$

ب -

$$(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$$

ج -

$$A - (B \cup C) = (A - B) - C$$

د -

$$A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$$

ه -

$$A - (B - A) = A$$

و -

$$(B - A) \cup (A \cap B) = B$$

ز -

$$[A \cup (A \cap B)] - [B \cap (B \cup A)] = A \cap B'$$

ح -

$$(A - C) \cap (B - C) = (A \cap B) - C$$

ط -

$$(A - B) \cap (C - D) = (A \cap C) - (B \cup D)$$

ی -

$$(A \cup B) - B = A - B$$

یا -

$$(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$$

بب -

$$\cap (A' \cup B) \cup [B \cap (A' \cup B')] = B$$

بج -

$$B \cap C \cup (A' \cap C) \cup (B' \cap C) = C$$

بد -

۱۲- ثابت کنید که هرگاه  $A \cap B = A \cap C$  و  $A \cup B = A \cup C$  ، آن گاه  $C$

۱۳- ثابت کنید هرگاه  $X \subset A$  و  $X \subset A'$  ، آن گاه  $X = \emptyset$  .

